Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

Sobre el concepto de límite

Prof. Israel Ramos García

Objetivo General

La idea de límite, concepto fundamental que subyace al cálculo diferencial e integral, toda vez que, la continuidad, la derivada y la integral se definen a través de éste. Encuentra su origen en la Antigüedad con el «cálculo del área del círculo», el «cálculo del volumen de una pirámide», el «cálculo del área de la espiral», el «cálculo del área de un sector parabólico», el «cálculo del área de la superficie de la esfera» y el «cálculo del volumen de la esfera» debido a Euclides (los primeros dos) y a Arquímedes (los últimos cuatro). Ahora bien, la necesidad de acompañar el concepto formal de límite con la idea intuitiva del principio de divisibilidad infinita para áreas, para volúmenes, para ángulos, para proporciones que, a su vez, subyacen al cálculo de los ejemplos antes mencionados, respectivamente. Permite dar cuenta de los fundamentos que yacen a la idea formal de límite asimismo permite observar la necesidad del cálculo aritmético (o de magnitudes discretas) que subyace a dichos cálculos (de magnitudes continuas). Resaltando así que el concepto de sucesión es fundamental en la propedéutica del cálculo de los límites. En suma, nuestro objetivo, hacer notar el papel que juega desvelar las leyes de progresión que subyacen al cálculo de los límites. Subrayando que el concepto de límite en su desarrollo histórico cambio gradualmente adquiriendo un contenido más profundo: de lo determinado a lo indeterminado.

Pedagogía

Proveer y desarrollar, a través del análisis comparativo de las fuentes originales, capacidades de pensamiento crítico e innovador propias del quehacer científico.

De lo continuo a lo discreto

Nos gustaría comenzar señalando y subrayando las ideas fundamentales que subyacen al origen histórico del concepto de límite, a saber,

1. «En lugar de considerar una transición continua de un valor de una magnitud a otro. Se considera una transición a través de un número de pasos intermedios, de manera que crezca el número de estos pasos intermedios, de modo que la distancia entre dos pasos intermedios consecutivos disminuye *ad infinitum*».[1]

2. La transición, del valor de una magnitud continua, a través de un número de pasos intermedios que incrementa *ad infinitum* se traduce en el concepto formal de sucesión, como una asignación $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$; la disminución de la distancia entre dos pasos intermedios consecutivos, muchas veces, se traduce en desvelar la ley de progresión que subyace a esta disminución *ad infinitum*.

Todo a la luz de la propedéutica que circunscribe al cálculo de los límites, es decir, la aprehensión del infinito por lo finito.

[1] Bernhard Riemann.

Contexto histórico

Desde tiempos antiguos los geómetras se han interesado por estudiar las propiedades de las figuras. Descubrir las proporciones que guardan las figuras curvilíneas a las rectilíneas, circunscribe, desde la Antigüedad hasta el siglo XVIII, un análisis del infinito, toda vez que, se requirió extender las construcciones con líneas rectas y circunferencias a construcciones con curvas más complejas, y éstas, en su generación, apelaron al infinito. Es decir, recurrieron al principio de variación continua.[2] Ahora bien, desvelar las leyes que invocan al infinito, a su vez, demanda descubrir los principios de progresión que subyacen al cálculo de proporciones geométricas. Toda vez que, desvelar dichas leyes permitió aprehender el infinito en términos finitos. Circunscribiéndose así el análisis del infinito al cálculo aritmético.

Los antiguos desvelaron la proporción que guardan los círculos[3]; la proporción que guarda un sector parabólico con el triángulo inscrito de la misma base[4]; la proporción que guarda la espiral de Arquímedes con el círculo generatriz[5]; la proporción que guarda la superficie de la esfera con el círculo máximo[6]; la proporción que guarda el cilindro y la esfera con la misma base y altura[7]; Sin embargo, la proporción que guarda un círculo con el cuadrado construido sobre su diámetro permaneció desconocida durante casi 2000 años.[8] En suma, los antiguos encontraron la proporción racional que subyace al cálculo de áreas y volúmenes e incluso el cálculo aproximado de la proporción del círculo al cuadrado que lo circunscribe, 11/14. Sin embargo, no el valor exacto: $1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots$ (suma infinita de fracciones).

En otras palabras, transitamos de relaciones de orden finito: fracciones, suma finita de fracciones, o leyes de progresión que subyacen al cálculo finito de suma de fracciones a relaciones de orden infinito, leyes de progresión que involucran un orden infinito como el caso de la cuadratura del círculo.

Dicho esto, y en aras de la brevedad, el presente ensayo se circunscribe a los tres primeros casos. Pretende esbozar el método que les permitió desvelar dichas proporciones que, no esta de más mencionar, hacen uso de un análisis del infinito. Todo lo anterior, dicho sea de paso, con la intención no solo de motivar sino de señalar la importancia de la indagación histórica en la comprensión del concepto de límite.

[2] Por ejemplo, para resolver el problema de la cuadratura de un círculo, los antiguos se auxiliaron de la cuadratriz de Dinóstrato para rectificar un cuarto de circunferencia (Ver https://israelramos.mx/2022/10/03/cuadratura-de-un-circulo/). Así, encontraron un triángulo rectángulo, cuya base es la circunferencia de un círculo y altura el radio, equivalente en área al círculo. Acto seguido, cuadraron el triángulo, es decir, encontraron un cuadrado equivalente en área a la del triángulo rectángulo (Ver https://israelramos.mx/2023/10/06/metodo-de-aplicacion-de-areas/). La cuadratriz, según la clasificación de Pappus (Ver https://israelramos.mx/2022/10/03/geometria-sintetica/), es un curva más compleja que una línea recta, circunferencia o, en general, que una cónica. Su generación conjuga dos movimientos continuos, uno rectilíneo y otro circular, apelando –en su construcción– a dos variaciones continuas.

[3] Uno a otro son como el cuadrado de sus diámetros.

[4] Uno a otro son como $4 : 3$.

[5] Uno a otro son como $1 : 3$.

[6] Uno a otro son como $4 : 1$.

[7] Uno a otro son como $3 : 2$.

[8] Leibniz, en 1682, publica la memoria *La verdadera proporción del círculo* donde calcula que dicha proporción se puede realizar no por una fracción –la aproximación hecha por Arquímedes fue de 11/14– sino por una suma infinita de fracciones: $1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \cdots$.

Análisis geométrico

Cabe observar que la falta de una unidad en la geometría a diferencia de la aritmética conduce a los antiguos a encontrar la medida adecuada de comparación para cada magnitud. Por ejemplo, para el área de una figura rectilínea la medida de comparación es el cuadrado; para el volumen de un sólido rectilíneo la medida de comparación es el cubo; para el área de la espiral la medida de comparación es el círculo; para el área de un sector parabólico la medida de comparación es el triángulo; para el área de la superficie de la esfera la medida de comparación es el círculo máximo; para el volumen de la esfera la medida de comparación es el cono.

Ahora bien, podemos distinguir en los cuatro últimos casos antes mencionados un *modus operandi* común para desvelar dicha proporción.

1. Los antiguos, a diferencia de como se calcula en la actualidad los mismos límites, sabían cuanto valía el límite sin calcularlo.[9]

2. Se auxiliaron principalmente de dos métodos, el de reducción al absurdo y el de agotamiento, para corroborar que el límite que postulaban era el correcto.

3. El principio de divisibilidad infinita quien posibilitó el cálculo de las proporciones antes mencionadas. Esto es, el principio de divisibilidad infinita para ángulos; para áreas; para proporciones de áreas y para proporciones de volúmenes, respectivamente.[10]

4. Pasar de un proceso de aproximación continua a un proceso de aproximación finita (mas infinita en potencia) a través de una ley de progresión que cumplen las magnitudes continuas analizadas.[11]

5. Si una cantidad geométrica, b, disminuye como la progresión: $b_0 = b, b_1 = b_0 - a_1, \ldots, b_n = b_{n-1} - a_n$, con $a_n > \dfrac{b_{n-1}}{2}$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $b_n \approx 0$ (se puede hacer tan pequeña como queramos, casi cero).[12]

[9] Modernamente distinguimos entre el método que nos permite mostrar que un límite existe del método que nos permite calcularlo. En un caso no requerimos saber el límite para mostrar que existe. En otro, calcularlo nos permite no solo mostrar que existe sino saber cuál su valor. En los casos que nos competen, modernamente, hacemos uso del método de agotamiento para mostrar que existe y, al mismo tiempo, calcular su valor. Los antiguos postulaban su valor y usaban el método de reducción al absurdo y el de agotamiento para corroborar que el valor era el correcto.

[10] El lector podría preguntarse cuál la razón de tanto distingo. Un ejercicio interesante que podría realizar nuestro amable lector, es, mostrar que basta el principio de divisibilidad infinita (PDI) para segmentos de línea recta para tener PDI para las demás cantidades de la geometría: ángulos, áreas, volúmenes y proporciones. Le recordamos a nuestro amable lector que no hay una unidad de medida en la geometría. Así, en principio, no habría por qué considerar a los segmentos de línea recta como una cantidad distinguida de las restantes. Y tomar como unidad de la geometría a un segmento de línea recta distinguido como lo hacemos modernamente en un curso de cálculo I cuando se construyen los números reales. Asignando a cada número real un segmento de línea recta. Más aún, ¿por qué la geometría no tuvo unidad hasta 1637 que la introduce René Descartes en *La Géométrie*?

[11] Para los tres casos de nuestro interés, es decir, el caso de la proporción de círculos, se aproxima a través de la proporción de polígonos regulares semejantes inscritos de 2^n-lados cuya proporción de áreas es como el cuadrado de los diámetros de los círculos donde yacen inscritos. Proporción que permanece invariante no importando el número de lados; el caso de la espiral, por propiedades de la misma, la suma de las áreas de los sectores circulares que aproximan su área, si los ángulos que los determinan están en progresión aritmética, son al círculo generatriz, en el paso n-ésimo de la aproximación, como $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 : (n+1) \cdot n^2$; para el sector parabólico, la suma de las áreas de los triángulos que aproximan su área están en progresión geométrica razón $\frac{1}{4}$, es decir, en el paso n-ésimo de la aproximación, la suma es al primer triángulo como $1 + \frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^2 + \cdots + (\frac{1}{4})^n : 1$.

[12] Es decir, $0 < b_n < \frac{b}{2^n}$.

Los círculos

Partiendo del siguiente hecho (Ver https://israelramos.mx/2023/08/18/seminario-filosofia-de-las-matematicas/).

Proposición. *Los polígonos semejantes inscritos en círculos son uno a otro como los cuadrados de los diámetros.*[13]

Cabe mencionar que, este hecho, es consecuencia de otro que reza

Proposición. *Los triángulos semejantes guardan entre sí la razón duplicada de sus lados correspondientes.*[14]

Ahora bien, dicho lo anterior, procedemos a corroborar que

Proposición. *Los círculos son uno a otro como los cuadrados de sus diámetros.*[15]

Demostración. Denotemos por $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ a los dos círculos; d_1 y d_2 sus diámetros, respectivamente; $S_1 := \text{área}(\mathcal{C}_1)$ y $S_2 := \text{área}(\mathcal{C}_2)$.

$$\vdash \frac{S_1}{S_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$$

Razón:

1. Supongamos, por reducción al absurdo, que existe un área, T, tal que
$$\frac{S_1}{T} = \frac{d_1^2}{d_2^2},$$
con $S_2 > T$.

2. Inscribimos polígonos regulares, P_n, de 2^n-lados, con $n \geq 2$, en $\mathcal{C}_2$ (Ver figura 1); e inscribimos en $\mathcal{C}_1$ polígonos, Q_n, semejantes a P_n; Sea $a_1 := \text{área}(P_2)$, $a_n := \text{área}(P_{n+1} - P_n)$, $n \geq 2$; $b := S_2$, $b_0 := b$, $b_n := b_{n-1} - a_n$, $n \geq 1$. Ahora bien, se puede mostrar que $a_n > \dfrac{b_{n-1}}{2}$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Afirmamos que, existe n_0 tal que $b_{n_0} < S_2 - T$. En efecto, dado que $0 < b_n < \dfrac{b}{2^n}$ y $0 < S_2 - T$, entonces, existe n_0 tal que $\dfrac{b}{2^{n_0}} < S_2 - T$. Así, $b_{n_0} < S_2 - T$.

3. Dado que, $b_{n_0} = S_2 - \text{área}(P_{n_0})$, entonces, $T < \text{área}(P_{n_0})$.

4. Por otro lado, sabemos que
$$\frac{\text{área}(Q_{n_0})}{\text{área}(P_{n_0})} = \frac{d_1^2}{d_2^2},$$
entonces, por hipótesis, tendríamos
$$\frac{S_1}{T} = \frac{\text{área}(Q_{n_0})}{\text{área}(P_{n_0})}.$$

[13] Proposición XII.1, *Elementos*, Euclides.
[14] Proposición VI.19, *Elementos*, Euclides. Es decir, la proporción de las áreas de los triángulos semejantes es como los cuadrados de sus lados.
[15] Proposición XII.2, *Elementos*, Euclides.

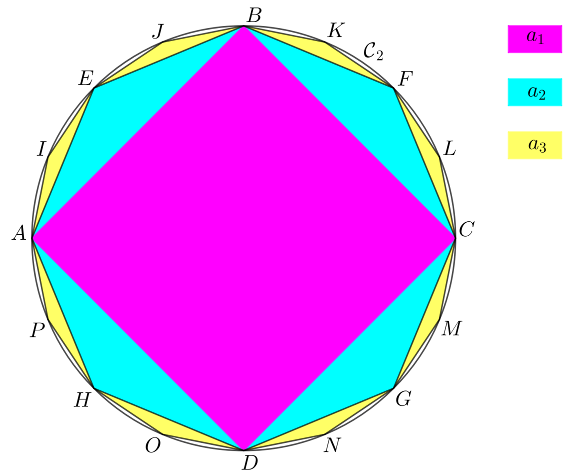

Figura 1: Aproximación área círculo

5. Por tanto, $\dfrac{T}{\text{área}(P_{n_0})} > 1$, ya que $\dfrac{S_1}{\text{área}(Q_{n_0})} > 1$ (porque Q_{n_0} esta inscrito en S_1). Es decir, $T > \text{área}(P_{n_0})$. Lo cual no puede ser.

6. El caso $S_2 < T$ se reduce al caso anterior.

$\square$

En términos del análisis algebraico se esbozo:

Proposición. *Sean* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$; $A, B, k \in \mathbb{R}^+$ *tal que*

$$\frac{A_n}{B_n} = k,\ \forall\, n \in \mathbb{N};\ \ \lim_{n\to\infty} A_n = A,\ \lim_{n\to\infty} B_n = B$$

Entonces

$$\frac{A}{B} = k.$$

El sector parabólico

Proposición. *Todo [sector parabólico] es cuatro tercios del triángulo que tiene la misma base que él e igual altura.*

Demostración. Consideremos un sector parabólico, $ADBEC$, cuya base es AC; denotemos por S su área; $k := \frac{4}{3}\,\text{área}(\triangle ABC)$.

$$\vdash S = k.$$

Razón:

1. Sea BB' diámetro del sector parabólico; Sean D y E puntos de intersección con la parábola $ADBEC$ de líneas paralelas al diámetro que pasan por el punto medio, D' y E', de AB' y $B'C$, respectivamente (Ver Figura 2).

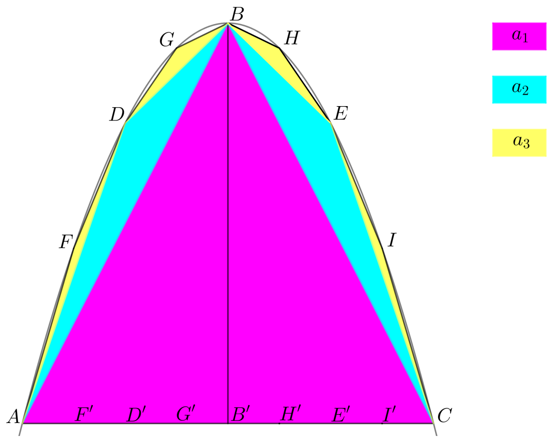

Figura 2: Aproximación área sector parabólico

2. Consideremos los triángulos, $\triangle ADB$ y $\triangle BEC$; $a_1^1 :=$ á$rea(\triangle ABC)$; $a_1^2 :=$ á$rea(\triangle ADB)$; $a_2^2 :=$ á$rea(\triangle BEC)$

3. Por construcción se puede mostrar que, $a_1^1 : a_1^2 :: 4 : 1$ y $a_1^1 : a_2^2 :: 4 : 1$.

4. Análogo a los incisos anteriores, sean F, G, H e I puntos de intersección con la parábola $ADBEC$ de líneas paralelas al diámetro que pasan por el punto medio, F', G', H' e I' de AD', $D'B'$, $B'E'$ y $E'C$, respectivamente.

5. Consideremos, ahora, los triángulos, $\triangle AFD$, $\triangle DGB$, $\triangle BHE$ y $\triangle EIC$; $a_1^3 :=$ á$rea(\triangle AFD)$; $a_2^3 :=$ á$rea(\triangle DGB)$; $a_3^3 :=$ á$rea(\triangle BHE)$; $a_4^3 :=$ á$rea(\triangle EIC)$.

6. Análogo, al punto 3, tenemos $a_1^2 : a_1^3 :: 4 : 1$, $a_1^2 : a_2^3 :: 4 : 1$; $a_2^2 : a_3^3 :: 4 : 1$ y $a_2^2 : a_4^3 :: 4 : 1$.

7. En general, iterando el procedimiento antes esbozado, construimos una progresión geométrica, $\{a_j^i\}_{i,j\in\mathbb{N}}$, decreciente de razón, $\dfrac{a_{j+1}^{i+1}}{a_j^{i+1}}$, $\frac{1}{4}$.

8. Ahora bien, se puede mostrar que,

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{m+1}\sum_{i=1}^{2^m} a_i^j}_{\text{área poligonal}} + \frac{a_{2^m}^{m+1}}{3} = \frac{4}{3}a_1^1,$$

es decir,

$$a_1^1 \cdot \left[1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^{2^m}\right] + a_1^1 \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{2^m} = \frac{4}{3}a_1^1$$

Así,

$$1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{4}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^n},$$

donde $n = 2^m$.

9. Notemos que, del punto anterior, la suma de las áreas, a_i^j, de los triángulos que, a su vez, conforman el área de la poligonal, P_n, inscrita en el sector parabólico es menor a k, es decir, menor a $\frac{4}{3} \cdot$ área$(\triangle ABC)$.

10. Supongamos, por reducción al absurdo, que $S \neq k$. Primero caso, $S > k$; Sea $a_1 :=$ área$(\triangle ABC)$, $a_n :=$ área$(P_{n+1} - P_n)$, $n \geq 2$; $b := S$, $b_0 := b$, $b_n := b_{n-1} - a_n$, $n \geq 1$. Ahora bien, se puede mostrar que $a_n > \dfrac{b_{n-1}}{2}$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Afirmamos que, para $0 < S - k$, existe n_0 tal que $b_{n_0} < S - k$. En efecto, dado que $0 < b_n < \dfrac{b}{2^n}$ y $0 < S_2 - T$, entonces, existe n_0 tal que $\dfrac{b}{2^{n_0}} < S_2 - T$. Así, $b_{n_0} < S_2 - T$. Ahora, dado que, $b_{n_0} = S -$ área(P_{n_0}), entonces, $k <$ área(P_{n_0}). Lo cual no puede ser (contradice lo observado en el punto 9).

11. El caso $S < k$, no es análogo al caso anterior pero en aras de la brevedad lo dejamos como ejercicio para nuestro amable lector.

□

En términos del análisis algebraico se esbozo:

Proposición. *Sean* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$*, sucesiones crecientes y decrecientes, respectivamente, con* $a_n + b_n = k$*, para toda* $n \in \mathbb{N}$*, con* $k \in \mathbb{R}$*; y*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = k.$$

La espiral

Proposición. *El área comprendida por la espiral trazada en su primer giro y por la recta primera ⟨tomada⟩ en la recta principio del giro es la tercera parte del círculo primero.*[16]

Demostración. Sea $OACD$ una espiral[17]; $\mathcal{C}$ su círculo generatriz de radio r. Denotemos por S al área contenida por la espiral y el segmento, OD, radio del círculo generatriz (Ver figura 3); $k := \frac{1}{3}$ área$(\mathcal{C})$.

$$\vdash S = k.$$

Razón:

1. Supongamos, por reducción al absurdo, que $S \neq k$. Primer caso, $S > k$.

2. Dividiendo la circunferencia de $\mathcal{C}$ en cuatro partes iguales por rayos que parten de O centro de $\mathcal{C}$; sean A, B, C y D la intersección de dichos rayos con la espiral; sean S_0^1, $S_1^1 := OAA'$, $S_2^1 := OBB'$ y $S_3^1 := OCC'$ los sectores circulares determinados por las rayos, $r_0 := 0$, $r_1 := OA$, $r_2 := OB$ y $r_3 := OC$, respectivamente, inscritos en la espiral (Ver figura 3).

[16] Proposición 24, *Tratados II: Sobre las espirales*, Arquímedes.
[17] Girando OD, radio de $\mathcal{C}$, en sentido contrario a las manecillas del reloj y con velocidad uniforme, y al mismo tiempo un punto moviéndose sobre éste con velocidad uniforme. Describa una línea llamada *espiral* y decimos que $\mathcal{C}$ es su círculo generatriz.

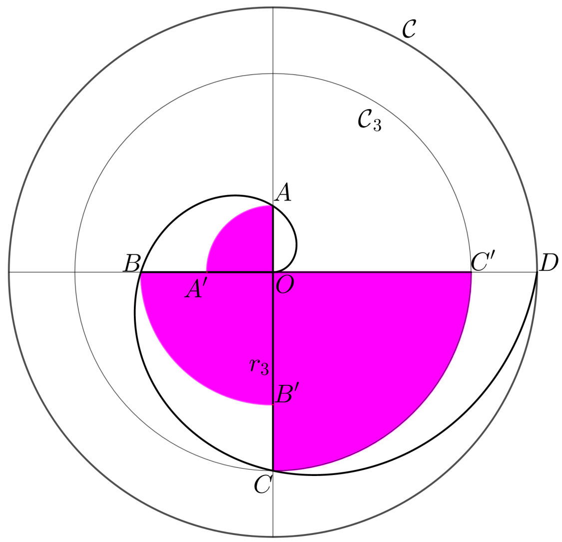

Figura 3: Aproximación área espiral de Arquímedes

3. Por propiedades mecánicas de la espiral atribuidas a su generación (o construcción) se puede mostrar que al estar los ángulos, $\alpha_0 := 0$, $\alpha_1 := \angle AOA'$, $\alpha_2 := \angle AOB'$ y $\alpha_3 := \angle AOC'$ en progresión aritmética. Entonces, los rayos inscritos en la espiral, r_0, r_1, r_2 y r_3, están, también, en progresión aritmética (Ver https://youtu.be/OLrVq6TsUkI?si=XnyZtOxtVqdGl_2Q, 1:36:00-1:50:00). Así

$$\begin{aligned}\frac{S_0^1 + S_1^1 + S_2^1 + S_3^1}{S_3^1 + S_3^1 + S_3^1 + S_3^1} &= \frac{(r_0^2 \cdot \alpha_0)/2 + (r_1^2 \cdot \alpha_1)/2 + (r_2^2 \cdot \alpha_1)/2 + (r_3^2 \cdot \alpha_1)/2}{4(r_3^2 \cdot \alpha_1)/2} \\ &= \frac{r_1^2 \cdot \alpha_1 + ((2r_1)^2 \cdot \alpha_1) + ((3r_1)^2 \cdot \alpha_1)}{4 \cdot ((3r_1)^2 \cdot \alpha_1)} \\ &= \frac{0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2}{3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2}\end{aligned}$$

4. Análogo a los puntos 2 y 3, dividimos, ahora, la circunferencia de $\mathcal{C}$ en ocho partes iguales por rayos que parten de O centro de $\mathcal{C}$; sean A, B, C, D, F, G y H la intersección de dichos rayos con la espiral; sean S_0^2, $S_1^1 := OAA'$, $S_2^2 := OBB'$, $S_3^2 := OCC'$, $S_4^2 := ODD'$, $S_5^2 := OEE'$, $S_6^2 := OFF'$ y $S_7^2 := OGG'$ los sectores circulares determinados por las rayos, $r_0 := 0$, $r_1 := OA$, $r_2 := OB$, $r_3 := OC$, $r_4 := OD$, $r_5 := OE$, $r_6 := OF$ y $r_7 := OG$, respectivamente, inscritos en la espiral (Ver figura 4).

5. Se tiene, ahora,
$$\frac{S_0^2 + S_1^2 + \cdots + S_7^2}{S_7^2 + S_7^2 + \cdots + S_7^2} = \frac{0^2 + 1^2 + \cdots + 7^2}{7^2 + 7^2 + \cdots + 7^2}$$

6. En general, si dividimos la circunferencia de $\mathcal{C}$ en n-partes iguales, donde $n = 2^{m+1}$, y denotamos por S_i^m, con $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, al área de los respectivos sectores circulares que

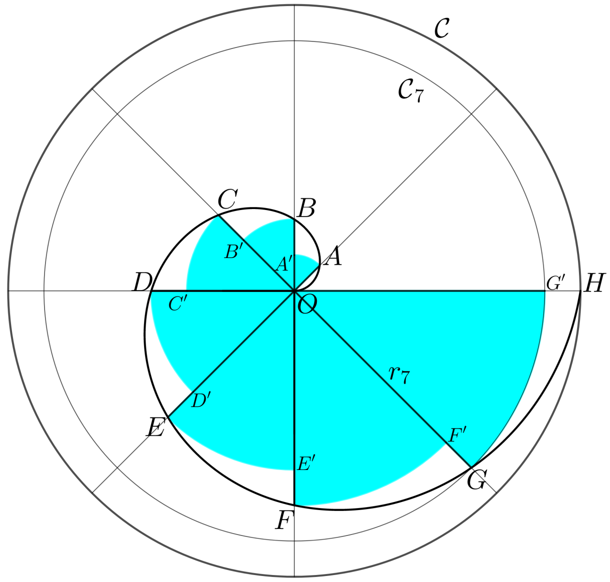

Figura 4: Aproximación área espiral de Arquímedes

determinan los rayos de dicha división con la espiral. Entonces,

$$\frac{s_n}{c_{n-1}} := \frac{S_0^m + S_1^m + \cdots + S_{n-1}^m}{S_{n-1}^m + S_{n-1}^m + \cdots + S_{n-1}^m} = \frac{0^2 + 1^2 + \cdots + (n-1)^2}{(n-1)^2 + (n-1)^2 + \cdots + (n-1)^2},$$

donde $s_n = \sum_{i=0}^{n-1} S_i^m$, c_{n-1} área del círculo de radio r_{n-1}.

7. Por otro lado, se puede mostrar, por inducción, que

$$\frac{0^2 + 1^2 + \cdots + (n-1)^2}{(n-1)^2 + (n-1)^2 + \cdots + (n-1)^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6(n-1)} \tag{1}$$

8. Ahora bien, análogo al caso de los sectores circulares inscritos a la espiral, se tiene el caso de los sectores circulares circunscritos (Ver figura 5). Se tiene, en este caso, que

$$\frac{t_n}{c_n} := \frac{T_0^m + T_1^m + \cdots + T_n^m}{T_n^m + T_n^m + \cdots + T_n^m} = \frac{0^2 + 1^2 + \cdots + n^2}{n^2 + n^2 + \cdots + n^2},$$

donde $T_i^m = S_{i+1}^m$, con $i \in \{0, \ldots, n-1\}$; T_n^m = sector circular de radio r_n y ángulo α_n; $t_n = \sum_{i=0}^{n-1} T_i^m$, c_n área del círculo de radio r_n.

Es decir,

$$\begin{aligned} \frac{t_n}{c_n} &= \frac{s_n + T_n^m}{c_n} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6n} \end{aligned}$$

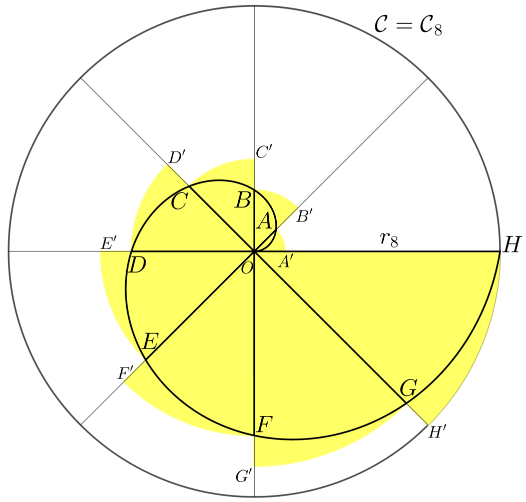

Figura 5: Aproximación área espiral de Arquímedes

9. Del punto 7 y 8 se tiene (Ver figura 6):

$$\begin{aligned} t_n - s_n &= T_n^m \\ &= \frac{r^2 \cdot \alpha_n}{2} \\ &= \frac{r^2 \cdot \frac{(2\pi)}{n}}{2} \\ &= \frac{\pi \cdot r^2}{n} \end{aligned}$$

10. Dado que $s_n < S < t_n$ y $t_n - s_n \approx 0$ (cuando $n \approx \infty$), entonces $S - s_n < t_n - s_n$ y para $S - k > 0$ existe n_0 tal que $t_{n_0} - s_{n_0} < S - k$. Es decir, $k < s_{n_0}$, pero $s_{n_0} < S$. Así $k < S$, lo cual no puede ser.

11. Supongamos, ahora, que $S < k$. Por el punto 10, tenemos, $S - s_n < t_n - s_n \approx 0$, es decir, $s_n \approx S$ (cuando $n \approx \infty$) pero $s_n \approx t_n$. Por tanto, $t_n \approx S$ (cuando $n \approx \infty$). Así para $k - S > 0$ existe n_0 tal que $t_{n_0} - S < k - S$, es decir, $t_{n_0} < k$, lo cual no puede ser. Ya que, por punto 8, $t_{n_0} = k + \frac{\text{área}(\mathcal{C})}{6n_0} > k$.

□

En términos del análisis algebraico se esbozo:

Proposición. *Sean* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$, *sucesiones crecientes y decreciemtes, respectivamente, tal que*

$$A_n < A < B_n$$

para toda $n \in \mathbb{N}$, *con* $A \in \mathbb{R}$; *y*

$$\lim_{n\to\infty} B_n - A_n = 0; \lim_{n\to\infty} B_n = k,$$

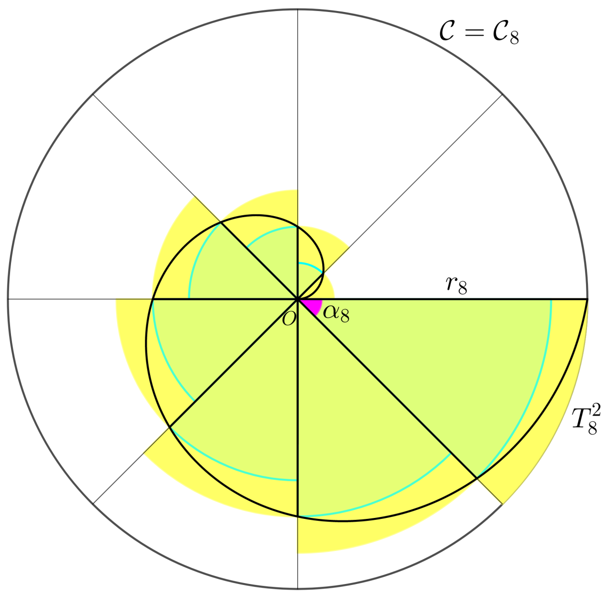

Figura 6: Diferencia de sectores circunscritos e inscritos

con $k \in \mathbb{R}$. *Entonces*

$$A = k.$$

De lo discreto a lo continuo

Lo hecho en la sección anterior motivan las siguientes definiciones y propiedades.

Definición. *Una sucesión,* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, es una función,* f*,*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & f(n), \end{array}$$

con $f(n) = a_n$.

Definición. *Decimos que una sucesión,* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$*, converge a* L *si y sólo si para toda* $\epsilon > 0$, $\exists\, N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ *tal que* $\forall\, n > N$

$$|a_n - L| < \epsilon$$

Observación. *Podemos parafrasear la definición anterior en los siguientes términos:*

> *Todos los elementos de una sucesión, salvo un conjunto finito de puntos, quedan contenidos alrededor de una vecindad del límite.*[18]

Definición. *Decimos que una sucesión,* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$*, es acotada si y sólo si existe* $M \in \mathbb{R}^+$ *tal que*

$$-M \leq |a_n| \leq M, \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$$

[18] Heurística que subyace al concepto de límite.

Proposición. *Sean* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *sucesiones de números reales.*

1. a) *Sea* $b \in \mathbb{R}$; *si,* $0 < a_n < \dfrac{b}{2^n}$, *para toda* $n \in \mathbb{N}$. *Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

   b) *Sea* $c \in \mathbb{R}$; *si,* $0 < c_n < \dfrac{c}{n}$, *para toda* $n \in \mathbb{N}$. *Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0.$$

2. *Si* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión creciente y acotada superiormente. Entonces converge a su supremo; Si* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión decreciente y acotada inferiormente. Entonces converge a su ínfimo.*

3. *Si los términos de la sucesión,* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *están en progresión aritmética, es decir,* $a_{n+1} - a_n = a$ *Entonces, la sucesión diverge.*

4. *Si los términos de la sucesión,* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$, *están en progresión geométrica. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0 & si \quad |a| < 1 \\ 1 & si \quad a = 1 \\ \infty & si \quad a > 1 \end{cases}$$

5. *Si* $a_n < c_n < b_n$, *para toda* $n \in \mathbb{N}$ *y*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

   Entonces

$$\lim_{n\to\infty} c_n = L$$

6. *Si* $a_n + b_n = c_n$, *para toda* $n \in \mathbb{N}$;

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L$$

   y

$$\lim_{n\to\infty} c_n = M$$

   Entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = M - L$$

7. *Si* $c_n = \dfrac{a_n}{b_n}$, *para toda* $n \in \mathbb{N}$, *con* $b_n > 0$; $M > 0$;

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

   y

$$\lim_{n\to\infty} b_n = M.$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{L}{M}$$

8. *Si* $a_n := \sum_{i=0}^{n} a^i$*, con* $0 < a < 1$*. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{1-a}$$

DEMOSTRACIÓN. 1. *a*) Basta mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b}{2^n} = 0.$$

En efecto, dada $\epsilon > 0$, $N := \lceil \log_2(\frac{b}{\epsilon}) \rceil$. Entonces,

$$\begin{array}{rcl} n & > & \log_2\left(\frac{b}{\epsilon}\right) \\ & \Rightarrow & \\ 2^n & > & \frac{b}{\epsilon} \\ & \Rightarrow & \\ \frac{b}{2^n} & < & \epsilon. \end{array}$$

Así, dada $\epsilon > 0$, existe N tal que $\frac{b}{2^n} < \epsilon$, para $n > N$. Pero $a_n < \frac{b}{2^n}$, entonces $a_n < \epsilon$, para $n > N$.

b) Es análogo al caso anterior. Es decir, basta mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c}{n} = 0.$$

En efecto, dada $\epsilon > 0$, $N := \lceil \frac{c}{\epsilon} \rceil$ cumple lo requerido, es decir, $\frac{c}{n} < \epsilon$, para $n > N$.

2. Supongamos que $\exists\, M \in \mathbb{R}$ tal que

$$|a_n| < M;\ a_n < a_{n+1},\ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$L := \sup A$, donde $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Afirmamos que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

En efecto, supongamos, por reducción al absurdo, que existe $\epsilon_0 > 0$ y $n_1, n_2, \ldots, n_k$ tal que $a_{n_i} \in (L - \epsilon_0, L + \epsilon_0)$, con $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Así, para $\epsilon' = \min\{|L - a_{n_i}| : i = 1, 2, \ldots, k\}$, la vecindad de L, $(L - \epsilon', L + \epsilon')$, no contiene ningún a_n. Contradiciendo el hecho de que L es el supremo de A.

El caso del ínfimo es análogo.

3. Dada $M > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot a > M$ (principio arquimediano), es decir, $a_n > M$.

4. Notemos que, $a_n = a^n$, así, si $|a| < 1$, se puede mostrar por inducción que, $0 < \cdots < |a^n| < |a^{n-1}| < \cdots < |a_1|$. Así, la sucesión decreciente, $a'_n = |a_n|$, converge a su ínfimo. Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0;$$

Si $a = 1$, entonces $a_n = 1$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Así

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1;$$

Si $|a| > 1$, se puede mostrar por inducción que, $|a_1| < |a_2| < \cdots < |a_n| < \ldots$. Así, la sucesión creciente, $a'_n = |a_n|$, y no acotada, diverge.

5. Dada $\epsilon > 0$, existe N_1 tal que para toda $n > N_1$, $|a_n - L| < \epsilon$; y existe N_2 tal que para toda $n > N_2$, $|b_n - L| < \epsilon$

   Por otro lado,

$$a_n < c_n < b_n \Rightarrow a_n - L < c_n - L < b_n - L \text{ ó } L - b_n < L - c_n < L - a_n$$

   Pero $b_n - L \leq |b_n - L|$; $L - a_n \leq |L - a_n|$. Así, para toda $n > N$, donde $N = \max\{N_1, N_2\}$:

$$|c_n - L| < \epsilon$$

6. Dada $\epsilon > 0$, para $\frac{\epsilon}{2}$, existe N_1 tal que para toda $n > N_1$, $|b_n - L| < \frac{\epsilon}{2}$; y existe N_2 tal que para toda $n > N_2$, $|c_n - M| < \frac{\epsilon}{2}$ De esta forma, para toda $n > N$, donde $N = \max\{N_1, N_2\}$:

$$\begin{array}{rcl} |a_n - (M - L)| & = & ((c_n - M) - (b_n - L)| \\ & < & |c_n - M| + |b_n - L| \\ & < & \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} \\ & < & \epsilon \end{array}$$

7. Notemos que, $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$. Así basta mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} a'_n \cdot b'_n = a' \cdot b',$$

   si $\lim_{n\to\infty} a'_n = a'$; $\lim_{n\to\infty} b'_n = b''$. En efecto, Dada $\epsilon > 0$; para $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2M}$, donde $M : |b'_n| < M, \forall n \in \mathbb{N}$, existe N_1 tal que $|a'_n - a'| < \epsilon'$, para toda $n > N_1$; y para $\epsilon'' = \frac{\epsilon}{2|a|}$ existe N_2 tal que $|b'_n - b'| < \epsilon''$, para toda $n > N_2$. Así, para toda $n > N$, donde $N = \max\{N_1, N_2\}$:

$$\begin{aligned}
|a'_n b'_n - a'b'| &= |(a'_n b'_n - a'b'_n) + (a'b_n - a'b')| \\
&= |(a'_n - a')b'_n + a'(b'_n - b')| \\
&\leq |a'_n - a'||b'_n| + |a||b'_n - b'| \\
&< \epsilon' \cdot M + |a| \cdot \epsilon'' \\
&= \frac{\epsilon}{2M} \cdot M + |a| \cdot \frac{\epsilon}{2|a|} \\
&= \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

Ahora bien, haciendo $b'_n = \frac{1}{b_n}$, basta mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} b'_n = \frac{1}{b}$$

En efecto, dada $\epsilon > 0$, para $\epsilon' = \frac{\epsilon \cdot |b|^2}{2}$, existe N_1 tal que para toda $n > N_1$, $|b_n - b| < \epsilon'$; para $\epsilon'' = \frac{|b|}{2}$, existe N_1 tal que para toda $n > N_2$, $|b_n - b| < \epsilon''$.[19] Así, para toda $n > N$, donde $N = \max\{N_1, N_2\}$:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| &= \frac{|b - b_n|}{|b_n|\,|b|} \\
&\leq \frac{|b - b_n|}{\frac{|b|^2}{2}} \\
&< \frac{\epsilon \cdot |b|^2}{2} \cdot \frac{1}{\frac{|b|^2}{2}} \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

8. Partiendo de la siguiente identidad:

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a},$$

y, del hecho, $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ (por el punto 4). Obtenemos lo solicitado.

□

[19] Dado que $|b_n| - |b| \leq |b_n - b| < \frac{|b|}{2}$. Entonces, $-\frac{|b|}{2} \leq |b_n| - |b| \leq \frac{|b|}{2}$, así $\frac{|b|}{2} \leq |b_n|$. Por tanto, $\frac{|b|^2}{2} \leq |b|\,|b_n|$, es decir, $\frac{1}{|b|\,|b_n|} \leq \frac{1}{\frac{|b|^2}{2}}$

Ejercicios

1. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una sucesión con

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{\left[\frac{i-1}{2}\right]} \frac{1}{i}, \text{ donde } [\;] \text{ denota la parte entera.}$$

   a) ¿La sucesión converge?

   b) De converger, ¿podrías decir a qué límite?

2. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función biyectiva. Demuestre que, si

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n} = L,$$

entonces $L = 1$.

Solución

1. Se puede calcular que, $x_1 = 1; x_2 = 1 + \frac{1}{2}; x_3 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; x_4 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$, en general, la sucesión sigue la siguiente ley:

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \dots$$

Ahora bien, graficando la poligonal que determinan los puntos, (n, x_n), se puede conjeturar que es una sucesión acotada, es decir, oscila entre los valores $\frac{9}{10}$ y $\frac{3}{2}$ (ver Figura 7). De hecho, dado el comportamiento oscilante de la sucesión no es fácil saber a dónde converge. Pero dada la ley de progresión de la sucesión afirmamos que converge a $\frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}$. Y, en aras de la brevedad, dejamos como ejercicio, a nuestro amable lector, corroborar este hecho.

2. Sea f como en el planteamiento del ejercicio. Haciendo $f(0) := 0$. Entonces,

$$\frac{f(n)}{n} = \frac{f(n) - f(0)}{n - 0},$$

es decir, $m_n := \dfrac{f(n)}{n}$, se puede interpretar como la pendiente de una recta que pasa por el origen. Ahora bien, supongamos, por reducción al absurdo, que $L \neq 1$. Entonces $L > 1$ ó $L < 1$. Primero, sea $M = L$, con $L > 1$, y consideremos la recta cuya pendiente es M, es decir, una recta que esta por arriba de la identidad.

Dado que m_n converge a M (> 1), entonces existe $\epsilon_0 \in \mathbb{Q}$ y $N(\epsilon_0) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall\, n \geq N : |m_n - M| < \epsilon_0, \text{ y } m_n > 1$$

Es decir, salvo un conjunto finito de puntos, $(1, f(1)), (2, f(2)), \dots, (N-1, f(N-1))$, todos los puntos $(n, f(n))$, es decir, todas las rectas, l_{m_n}, de pendiente m_n están contenidas en la vecindad $(l_{M-\epsilon_0}, l_{M+\epsilon_0})$ (ver Figura 8). Por otro lado, dado que $f(N) > N$, hay más puntos en

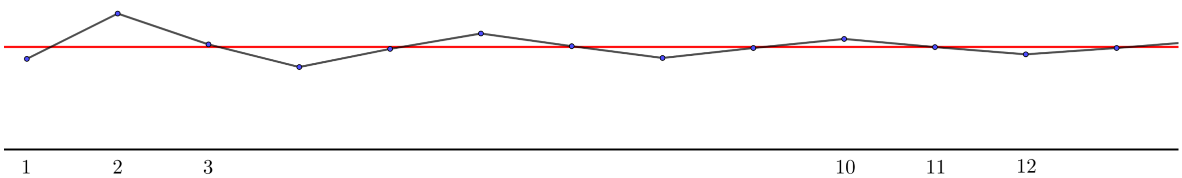

Figura 7

el conjunto $B = \{1, 2, \ldots, f(N)\}$ que en el conjunto $A = \{1, 2, \ldots, N\}$. Esto es, existe $n_0 \in B$, que no es imagen de algún elemento en A (puntos rojos en la Figura 8). Contradiciendo el hecho de que f es sobreyectiva.

El caso $M < 1$, es análogo, ahora, vamos a contradecir el hecho de que f es inyectiva.

En la práctica, del cálculo de límites, muchas veces, es difícil saber cuál el límite al que converge una sucesión. Ejemplo de ello, el ejercicio 1. Razón por la cual, es necesario tener un criterio que nos permita saber cuándo una sucesión converge sin saber el límite. Dicho lo anterior, motivamos la siguiente definición.

Definición. *Decimos que una sucesión,* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$*, es de Cauchy si y sólo si para toda* $\epsilon > 0$, $\exists\, N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ *tal que* $\forall\, n,\, m > N$

$$|a_n - a_m| < \epsilon$$

Proposición. *Sea* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *una sucesión. Ésta es convergente si y sólo si es de Cauchy.*

Demostración. Supongamos que, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, es convergente a $L \in \mathbb{R}$.

$$\vdash \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ es de Cauchy}$$

Razón: Dada $\epsilon > 0$, para $\frac{\epsilon}{2}$ existe N tal que

$$|a_n - L| < \frac{\epsilon}{2}, \;\; \forall\, n \geq N$$

Así, para toda n, $m \geq N$

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= |(a_n - L) + (L - a_m)| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

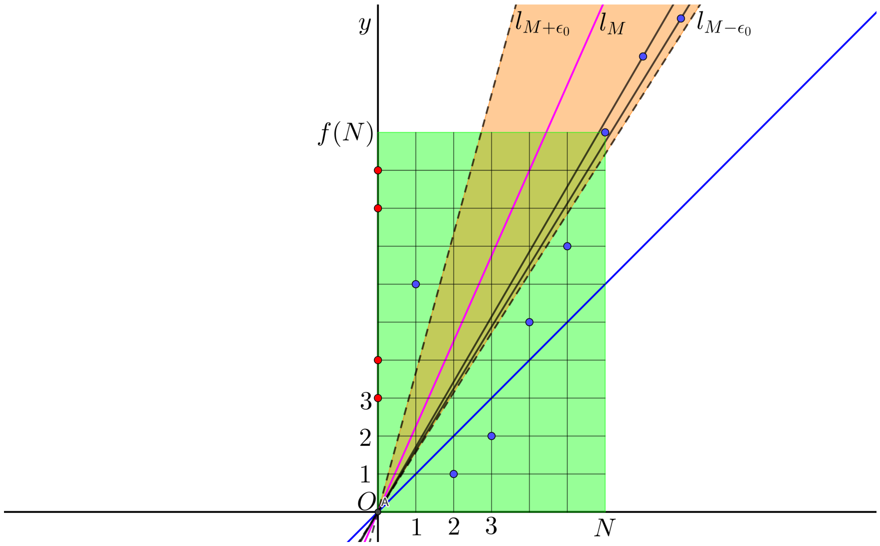

Figura 8

Por tanto, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.
Supongamos, ahora, que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy

$$\vdash \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ es convergente}$$

Razón:

Supongamos, por reducción al absurdo, que no es convergente. Primero, notemos que la sucesión no es acotada. Si la sucesión fuese acotada, existiría M tal que $a_n \in (-M, M)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Así, existiría $L_0 \in (-M, M)$ y $\epsilon \approx 0$ tal que hay una infinidad de $n's$: $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$, con $a_{n_k} \in (L_0 - \epsilon, L_0 + \epsilon)$. Pero esto contradice el hecho de que $\{a_n\}$ es no convergente, ya que para $L = L_0 \in \mathbb{R}$ existe una vecindad, $V_{\epsilon_{L_0}}(L_0)$, de L_0 de radio ϵ_{L_0} en el que solo hay una cantidad finita de elementos de la sucesión. Entonces tomando $\epsilon < \epsilon_{L_0}$, y dado que $(L_0 - \epsilon, L_0 + \epsilon) \subset (L_0 - \epsilon_{L_0}, L_0 + \epsilon_{L_0})$, tendríamos que $V_{\epsilon_{L_0}}(L_0)$ contiene una infinidad de elementos de la sucesión, lo cual no puede ser.

Segundo, suponiendo que la sucesión es no acotada, entonces para $r_m = M$, con $M \in \mathbb{N}$, existen $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_{m_1} - a_{m_2}| > M$. Así, para $\epsilon < 1$, existe una infinidad de elementos de la sucesión cuya distancia entre ellos es mayor que 1. Contradiciendo el hecho de que la sucesión es de Cauchy, es decir, que salvo un conjunto finito de elementos de la sucesión, la distancia de cualesquiera dos elementos es menor que 1.

□

Conclusión

El concepto de límite que encuentra su origen en la Antigüedad con el cálculo de proporciones de magnitudes continuas requirió un análisis del infinito a través de la discretización, finita pero infinita en potencia, de dicho cálculo. Acentuando que el concepto de sucesión es el prolegómeno al concepto de límite. Así, basando el concepto de límite en el de sucesión, no sólo discretizamos lo continuo, podemos reescribir la continuidad, la derivabilidad y la integrabilidad a través de éste.

Libros de Consulta

[1] Euclides. *Elementos X-XIII*. Gredos.

[2] Arquímedes. *Tratados II: Sobre las líneas espirales- Cuadratura de la parábola*. Gredos.

Bibliografía Complementaria

1. https://israelramos.mx/2022/10/03/cuadratura-de-un-circulo/
2. https://israelramos.mx/2023/10/06/metodo-de-aplicacion-de-areas/
3. https://israelramos.mx/2022/10/03/geometria-sintetica/
4. https://israelramos.mx/2023/08/18/seminario-filosofia-de-las-matematicas/
5. https://youtu.be/OLrVq6TsUkI?si=XnyZtOxtVqdGl_2Q, 1:36:00-1:50:00.

