Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

Máximos y Mínimos

Prof. Israel Ramos García

Objetivo General

Suministrar las bases para desarrollar el método heurístico que subyace al cálculo de valores máximos y mínimos y que, a su vez, nos permiten fundamentar los criterios o métodos cuantitativos para encontrar los mismos.

Pedagogía

Proveer y desarrollar, a través del análisis comparativo de las fuentes originales, capacidades de pensamiento crítico e innovador propias del quehacer científico.

Máximos y Mínimos

Análisis Cualitativo

¿Cómo caracterizar a un valor máximo o mínimo?

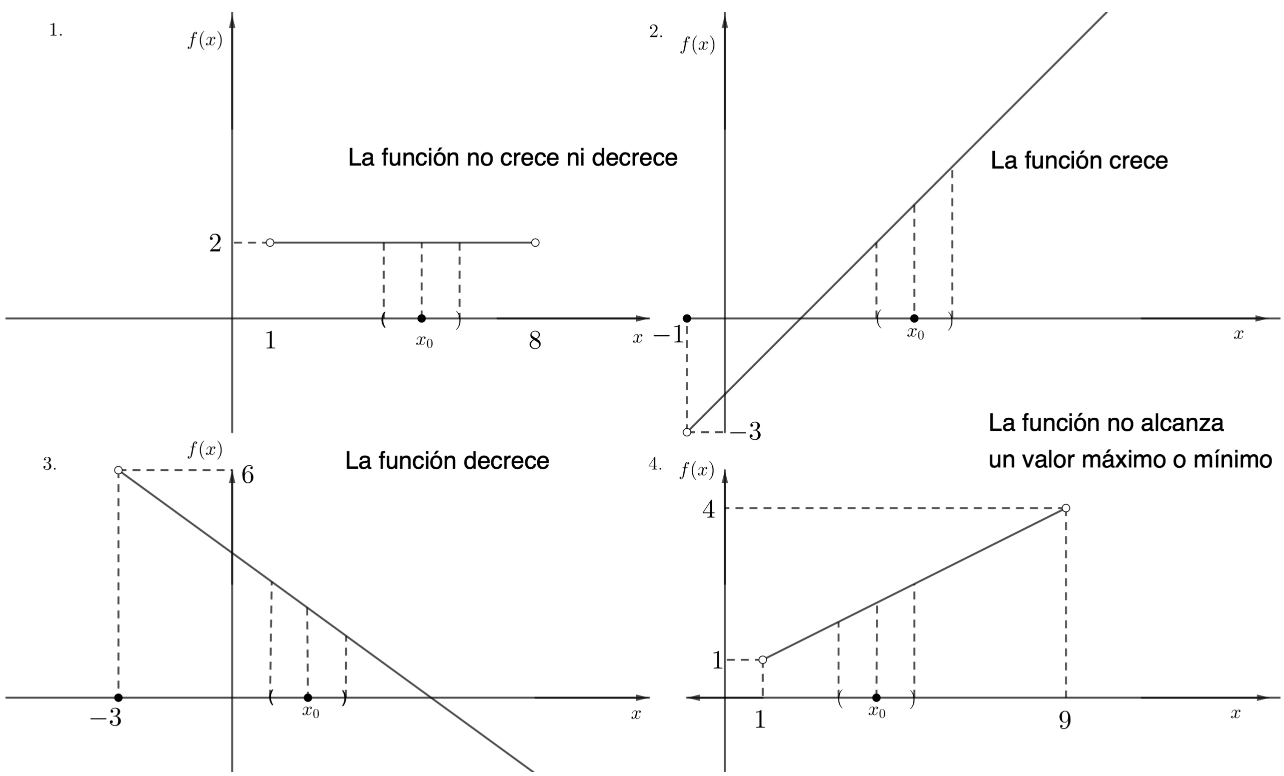


Figura 1: Formas de crecer

En los cuatro ejemplos de comportamiento que puede tener una función $f(x)$ (ver Figura 1), observamos:

1. La función no crece ni decrece en todo su dominio de definición.

$$f(x) \leq f(x_0),\ \forall\, x \in (1, 8)$$

2. La función crece en todo su dominio de definición.

$$-3 < f(x),\ \forall\, x \in (-1, +\infty)$$

   f no alcanza un valor máximo, toda vez que es creciente y no acotada superiormente, y no alcanza el valor mínimo, toda vez que el candidato a ser valor mínimo, -3, no es alcanzado por los valores de $f(x)$.

3. La función decrece en todo su dominio de definición.

$$f(x) < 6,\ \forall\, x \in (-3, +\infty)$$

   f no alcanza un valor mínimo, toda vez que f es decreciente y no acotada inferiormente, y no alcanza el valor máximo, toda vez que el candidato a ser valor máximo, 6, no es alcanzado por los valores de $f(x)$.

4. La función crece pero no alcanza un valor máximo y mínimo respecto a todos los valores que puede tomar en su dominio de definición.

$$1 < f(x) < 4,\ \forall\, x \in (1, 9)$$

   Toda vez que al ser f estrictamente creciente, acotada inferiormente y acotada superiormente, los candidatos a valor máximo y valor mínimo serían, 1 y 4, pero no pueden ser alcanzados por x's pertenecientes al dominio de definición de la función, ya que en $x = 1$ y $x = 9$, si pertenecieran al dominio de la función, se alcanzan los valores 1 y 4, respectivamente.

Podría uno conjeturar que la razón por la cual una función no alcanza su valor máximo o mínimo yace en el hecho de que la función no es acotada superiormente o acotada inferiormente, respectivamente. Como en los casos 2 y 3, pero el caso 4 nos muestra que la función puede ser acotada inferiormente y superiormente, además, con dominio acotado inferiormente y superiormente, a diferencia de los casos, 2 y 3, cuyos dominios no son acotados superiormente, sí, inferiormente. Y, no alcanzar su valor máximo y mínimo.

¿Puede una función continua, acotada superiormente e inferiormente, con dominio acotado y definida en un intervalo semiabierto, $(a, b]$ o $[a, b)$, alcanzar su valor máximo o mínimo? No necesariamente, la función, $f(x) = -x + \sin\left(\frac{1}{x}\right);\ 0 < x \leq 2$, no alcanza un valor máximo o mínimo.

Observación. *Los candidatos a valor máximo y mínimo serían* 1 *y* -1*, ya que los valores de la función están acotados por los valores de las rectas* $y(x) = -x + 1$ *y* $y(x) = -x - 1$ *(ver Figura 2). Pero nunca alcanza esos valores aunque se aproxima tanto como queramos:* $-1 - \epsilon$*;* $1 - \epsilon$*,* $\forall \epsilon > 0$ *(puntos color verde en la Figura 2). Por otro lado, nótese que* $Dom(f) = (0, 2]$*, ¿puede una función continua definida en un intervalo cerrado no alcanzar su valor máximo o mínimo?*

Así, pues, buscar el valor máximo o mínimo de una función requiere, necesariamente, garantizar que tiene sentido nuestra búsqueda, es decir, garantizar que la función alcanza su valor máximo o

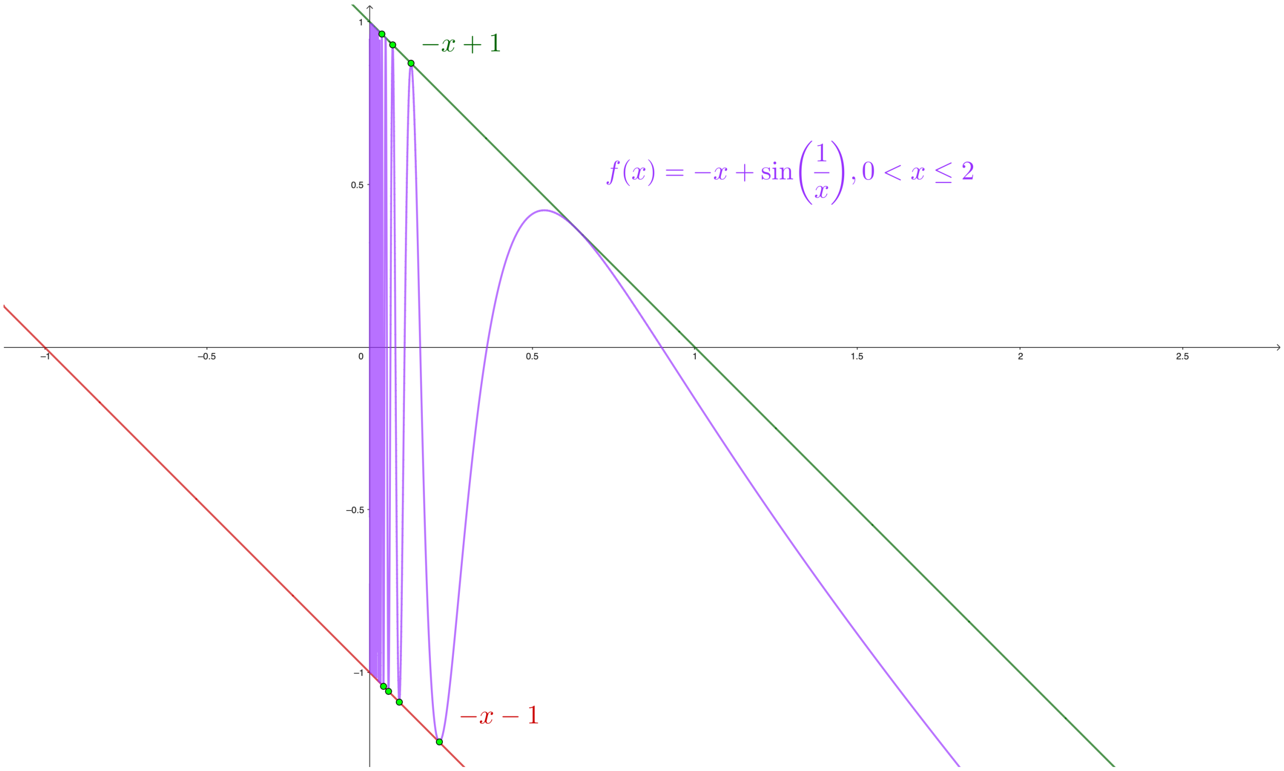


Figura 2: Función continua, acotada, dominio acotado (intervalo semiabierto o semicerrado) y, no obstante, no alcanza su valor máximo o mínimo.

mínimo. Acto seguido, buscar los valores x's donde la función alcanza su valor máximo o mínimo y cuál esos valores. Lo antes mencionado, motiva la siguiente afirmación.

Proposición. *Toda función continua definida en un intervalo cerrado alcanza su valor máximo y mínimo.*

Nótese que la idea algebraica que subyace al valor máximo o mínimo, a saber (ver Figura 3),

$$f(x_0)\text{ es valor }\textbf{máximo absoluto}\text{ si y sólo si }f(x) \leq f(x_0),\ \forall\, x \in Dom(f)$$

$$f(x_0)\text{ es valor }\textbf{mínimo absoluto}\text{ si y sólo si }f(x_0) \leq f(x),\ \forall\, x \in Dom(f)$$

O, la idea de un máximo o mínimo, no absoluto, pero sí relativo (ver Figura 5, casos 3 y 4), a saber,

$$f(x_0)\text{ es valor }\textbf{máximo relativo}\text{ si y sólo si }f(x) \leq f(x_0),\ \forall\, x \in V_r(x_0),\text{ p. a. }r > 0$$

$$f(x_0)\text{ es valor }\textbf{mínimo relativo}\text{ si y sólo si }f(x_0) \leq f(x),\ \forall\, x \in V_r(x_0),\text{ p. a. }r > 0$$

Nos permite saber, matemáticamente, cuándo un valor $f(x_0)$ es un valor máximo o mínimo. Ahora bien, la definición anterior no es práctica, toda vez que para corroborar que un valor es valor máximo o mínimo, presupone que conocemos cuáles son esos valores máximos o mínimos y, acto seguido, corroborar algebraicamente que dicho valor propuesto, en efecto, es un valor máximo o mínimo.

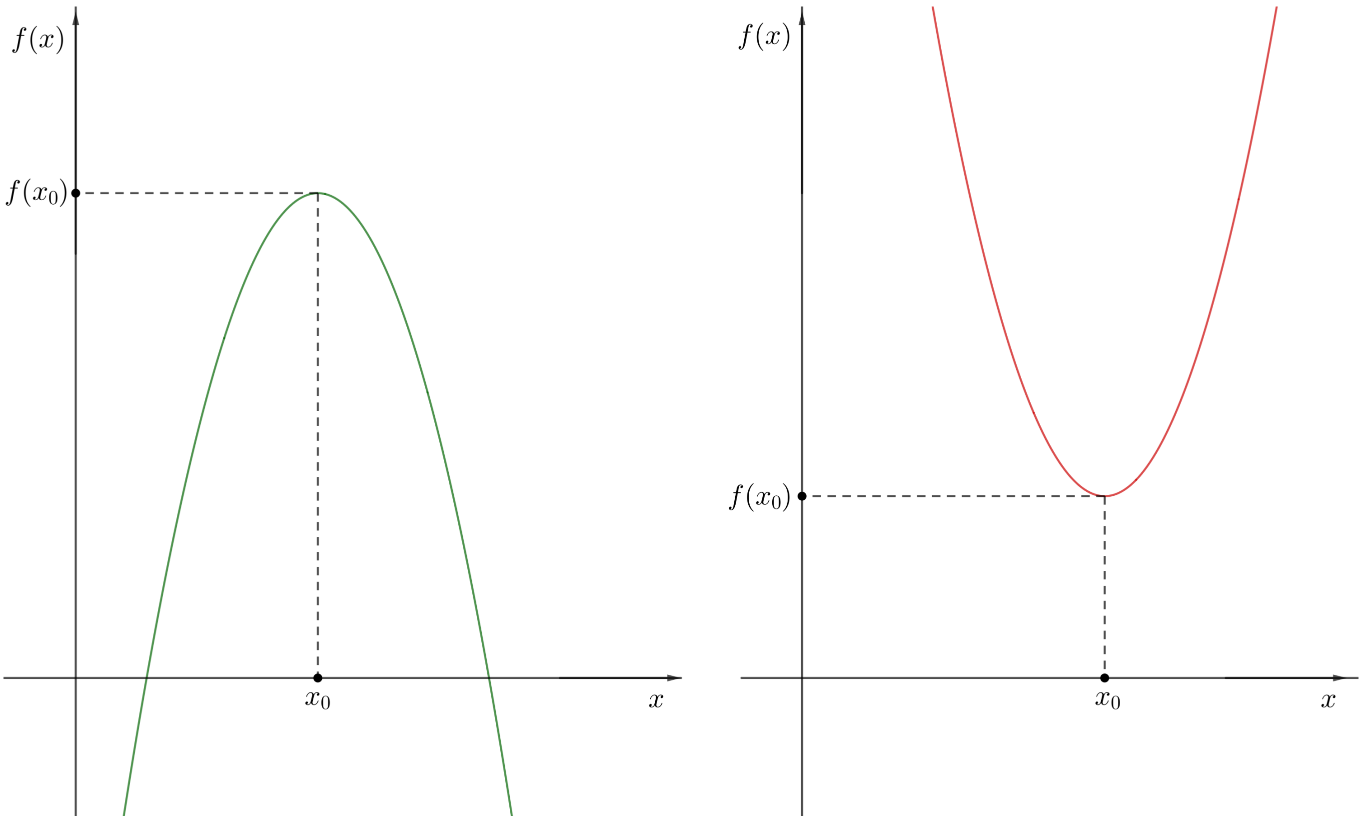


Figura 3: Funciones continuas que alcanzan su valor máximo y mínimo absolutos.

Por ejemplo, para fijar ideas, consideremos la función, $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ Podríamos cualitativamente conjeturar cuáles los valores máximos y mínimos.

1. Observemos que la función es impar.

$$f(-x) = \frac{-x}{1+(-x)^2} = -\frac{x}{1+x^2} = -f(x)$$

   Entonces, la gráfica de la función es simétrica respecto al origen. De esta forma, de alcanzar un valor máximo o mínimo en valores de x's sobre el eje positivo, entonces $f(x)$ alcanzaría un valor mínimo o máximo, respectivamente, en valores de $-x$'s sobre el eje negativo.

2. Si $x \approx +\infty$, entonces $1 + x^2 \approx x^2$. Así, $\dfrac{x}{1+x^2} \approx \dfrac{x}{x^2} = \dfrac{1}{x}$ Es decir, cuando $x \to +\infty$, $f(x) \to 0^+$ Y, por ende, al ser la función impar, $x \to -\infty$, $f(x) \to 0^-$

3. Si $x \approx 0$, entonces $1 + x^2 \approx 1$. Así, $\dfrac{x}{1+x^2} \approx \dfrac{x}{1} = x$ Es decir, la función $f(x)$ llega al cero como la función identidad.

4. ¿La función es acotada? Sabemos que toda función continua en un intervalo cerrado alcanza su valor máximo y mínimo y, por ende, sería acotada. Pero el $Domf(f) = (-\infty, +\infty)$, por el análisis cualitativo esbozado podemos intuir, que al ser $f(x)$ una función continua, en una

vecindad del cero llegar como la identidad y ser asintótica al eje x cuando $x \to \pm\infty$ (ver Figura 4), la función es acotada y alcanza un valor máximo y mínimo. ¿Cuál ese valor máximo y mínimo?

5. Lo antes mencionado, motiva la necesidad de encontrar un método que nos permita saber en qué valores del dominio se alcanza el valor máximo o mínimo de una función continua que podemos garantizar que existe el valor máximo o mínimo. Ya sea de manera cualitativa o por el teorema de existencia, antes mencionado, *Toda función continua definida en un intervalo cerrado alcanza su valor máximo y mínimo.*

6. Afirmamos que el valor máximo y mínimo es $1/2$ y $-1/2$, respectivamente. En efecto,

$$\frac{x}{1+x^2} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x < 1+x^2 \Leftrightarrow 0 < (x-1)^2;\ x \neq 1$$
$$\frac{x}{1+x^2} > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -2x < 1+x^2 \Leftrightarrow 0 < (x+1)^2;\ x \neq -1$$

7. ¿Cómo podemos conocer los valores máximos y mínimos de una función, dado que ésta puede variar de una infinidad de formas en un intervalo muy pequeño y que, el análisis cualitativo, no permita discernir?

8. ¿Cómo contener la infinidad de formas locales que puede tener un máximo o mínimo? (ver Figura 5, casos 1 y 2) ¿Cómo caracterizamos, localmente, el comportamiento geométrico de un máximo o mínimo? (ver Figura 5, casos 3 y 4)

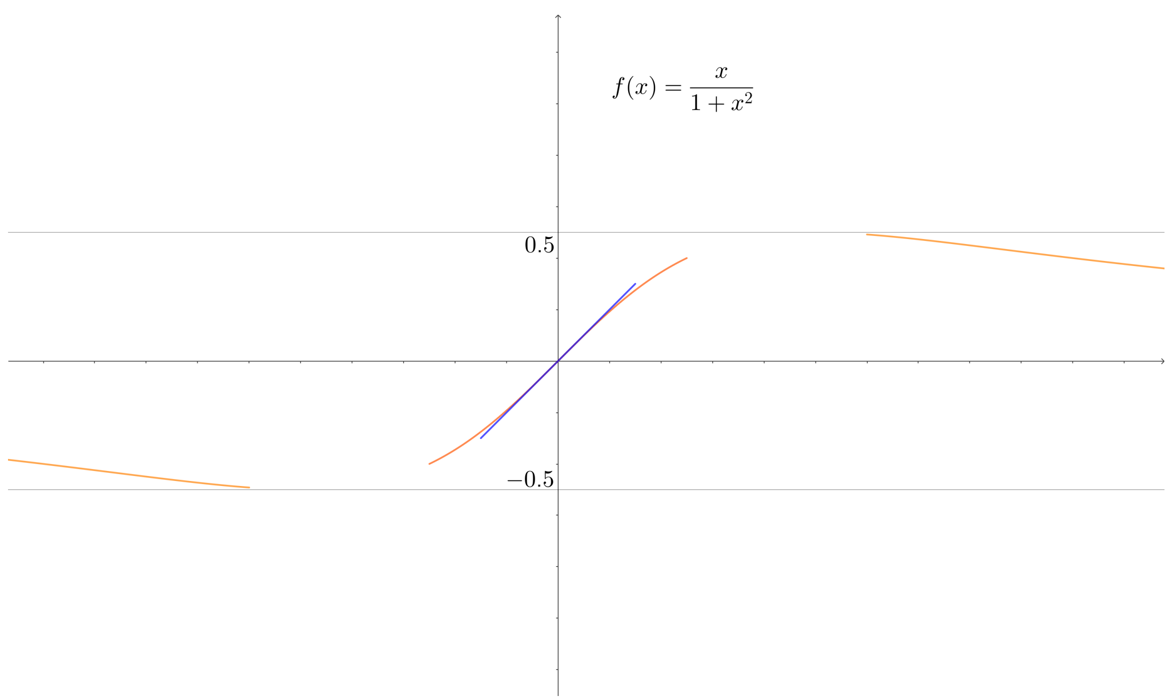


Figura 4: Análsis cualitativo.

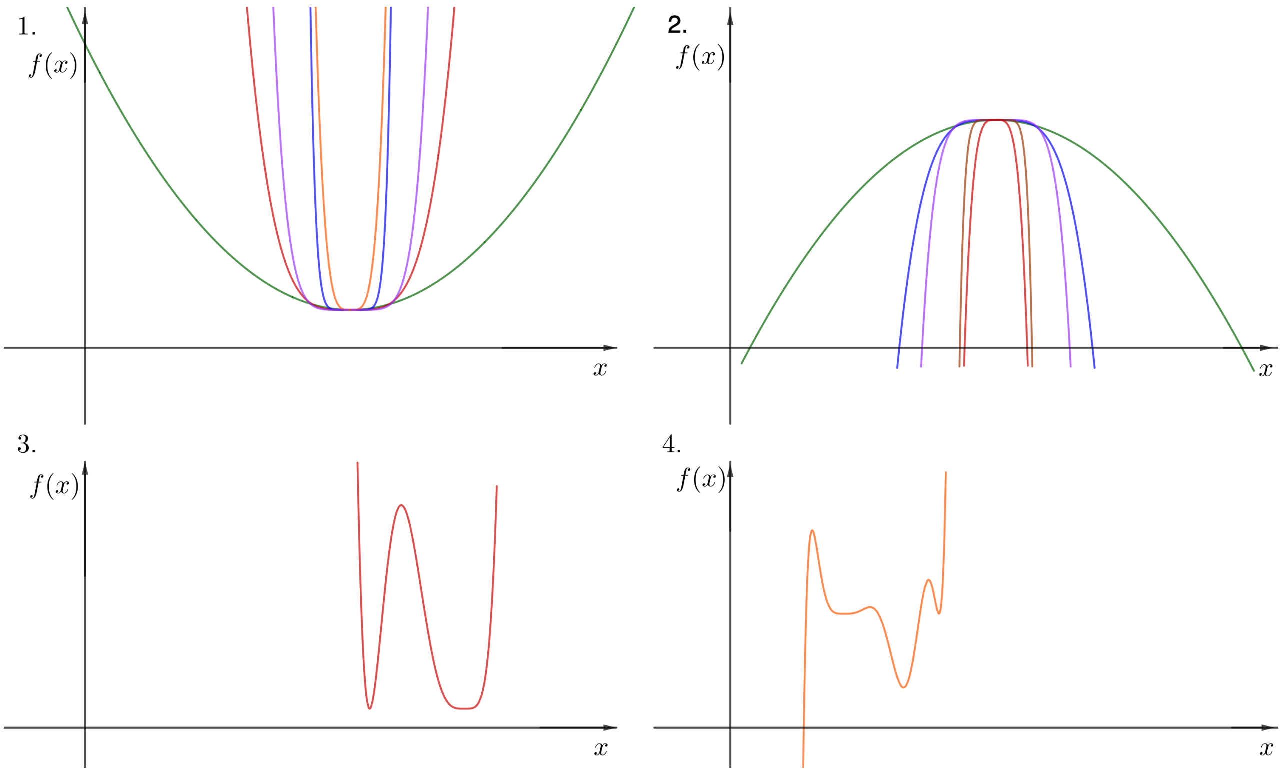


Figura 5: Diferentes formas en que una función continua puede alcanzar un valor máximo o mínimo, absoluto o relativo.

Análisis Cuantitativo o La Necesidad del Cálculo Diferencial

Hay una forma de recoger cualitativamente las diferentes formas en que puede variar, localmente, un máximo o un mínimo de una función, a través de, aproximar localmente el comportamiento de la función por un polinomio general de segundo orden en una variable: $p(x) = ax^2 + bc + c$ (ver Figura 6). Cabe mencionar que, dado que el comportamiento local de la mejor aproximación lineal a la función alrededor de un valor máximo o mínimo, es el de un recta, traslada al punto donde alcanza el valor máximo o mínimo, de pendiente cero (recta horizontal trasladada). Dicha aproximación dista de poder diferenciar las diferentes formas en que puede variar un valor máximo o mínimo, razón por la cual se aproxima por un polinomio de grado dos que, a diferencia de la línea recta, si diferencia cualitativamente los diferentes comportamientos de un valor máximo o mínimo (¿todos?).

Ahora bien, ¿cuál de todos los polinomios de segundo orden, $p(x) = ax^2 + bc + c$, se parece más, localmente, a la función $f(x)$? Lo antes mencionado motiva las siguientes observaciones.

1. En general, buscamos un polinomio que pase por tres puntos, $(x_0, y_0); (x_1, y_1); (x_2, y_2)$ contenidos en la gráfica de la función $f(x)$, con $x_1 = x_0 + \Delta x; x_2 = x_0 + 2\Delta x; y_0 = f(x_0); y_1 = f(x_1); y_2 = f(x_2)$.

2. Dado que un polinomio de grado dos en una variable esta determinado de manera única por tres puntos, del plano, por donde pasa. Y dado que en x_0, $p(x_0) = y_0$, entonces $p(x) = y_0 + (x - x_0)A + (x - x_0)B(x)$; Además, $p(x_1) = y_1$ y, haciendo, $B(x_1) = 0$ para simplificar. Obtenemos $A = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$. Ahora bien, $B(x_1) = 0$, implica $B(x) = (x - x_1)C$, pero $p(x_2) = y_2$,

entonces

$$\begin{aligned}
C &= \frac{(y_2-y_0)-\frac{(x_2-x_0)(y_1-y_0)}{x_1-x_0}}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \\
&= \frac{(y_2-y_1)-(y_1-y_0)}{2(\Delta x)^2} \\
&= \frac{\Delta y_1-\Delta y_0}{2(\Delta x)^2} \\
&= \frac{\Delta^2 y_0}{2(\Delta x)^2},
\end{aligned}$$

donde $\Delta x = x_1 - x_0 = x_2 - x_1; \Delta y_0 = y_1 - y_0; \Delta y_1 = y_2 - y_1; \Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$ Por tanto,

$$p(x) = y_0 + \frac{(x-x_0)}{1}\frac{\Delta y_0}{\Delta x} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{1\cdot 2}\frac{\Delta^2 y_0}{(\Delta x)^2}$$

3. Es natural esperar que si hacemos $\Delta x \to 0$, el polinomio de interpolación, antes mencionado, se aproxime cada vez más a la función $f(x)$ alrededor de x_0. En efecto, si $\Delta x \to 0$, entonces $x_2 \to x_1; x_1 \to x_0$;

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y_0}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} \\
&= \lim_{x_1\to x_0}\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \\
&= f'(x_0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta^2 y_0}{(\Delta x)^2} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{[f(x_0+2\Delta x)-f(x_0+\Delta x)]-[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]}{(\Delta x)^2} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{[2f'(x_0+2\Delta x)-f'(x_0+\Delta x)]-[f'(x_0+\Delta x)]}{2\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2f''(x_0+2\Delta x)-f''(x_0+\Delta x)}{1} \\
&= 2f''(x_0)-f''(x_0) \\
&= f''(x_0)
\end{aligned}$$

Así,

$$\lim_{\Delta x\to 0} p(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{1\cdot 2}(x-x_0)^2$$

4. Notemos, finalmente que, $q(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{1\cdot 2}(x-x_0)^2$, es el polinomio de segundo orden que mejor aproxima a $f(x)$ alrededor de x_0; $q(x_0) = f(x_0); q'(x_0) = f'(x_0); q''(x) = f''(x_0), \forall\, x \in \mathbb{R}$ Además, hemos observado que si $f(x_0)$ es un valor máximo o

mínimo, entonces $f'(x_0) = 0$. Así, $q(x) = f(x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{1 \cdot 2}(x - x_0)^2$. Más aún, $f''(x_0) > 0$, $q(x)$ es una parábola que alcanza un valor mínimo absoluto en x_0 (ver Figura 6); $f''(x_0) < 0$, $q(x)$ es una parábola que alcanza un valor máximo absoluto en x_0 (ver Figura 6). En términos del comportamiento local alrededor de x_0 de $f(x)$, si $f'(x_0) = 0$; $f''(x_0) > 0$, $f(x)$ alcanza un valor mínimo relativo en x_0; si $f'(x_0) = 0$; $f''(x_0) < 0$, $f(x)$ alcanza un valor máximo relativo en x_0.

5. En suma, los candidatos posibles a ser valores máximos o mínimos, se encuentran en los ceros de la primera derivada, $f'(x) = 0$; Lo antes analizado no agota todas las posibilidades de búsqueda de valores máximos o mínimos de una función, ya que la función alrededor de un valor máximo o mínimo, localmente, se pude aproximar no por una parábola o polinomio de segundo grado sino por un polinomio de grado 4 o 6, y con primera, segunda y tercera derivada en x_0 igual a cero, etcétera (ver Figura 5, casos 1 y 2). Lo cual nos hace valorar la necesidad de caracterizar geométricamente o cualitativamente el comportamiento local de un valor máximo o mínimo sin la necesidad de calcular los diferentes grados de las derivadas de la función. De esta forma, motivamos los siguientes análisis heurísticos que subyacen a las siguientes aplicaciones.

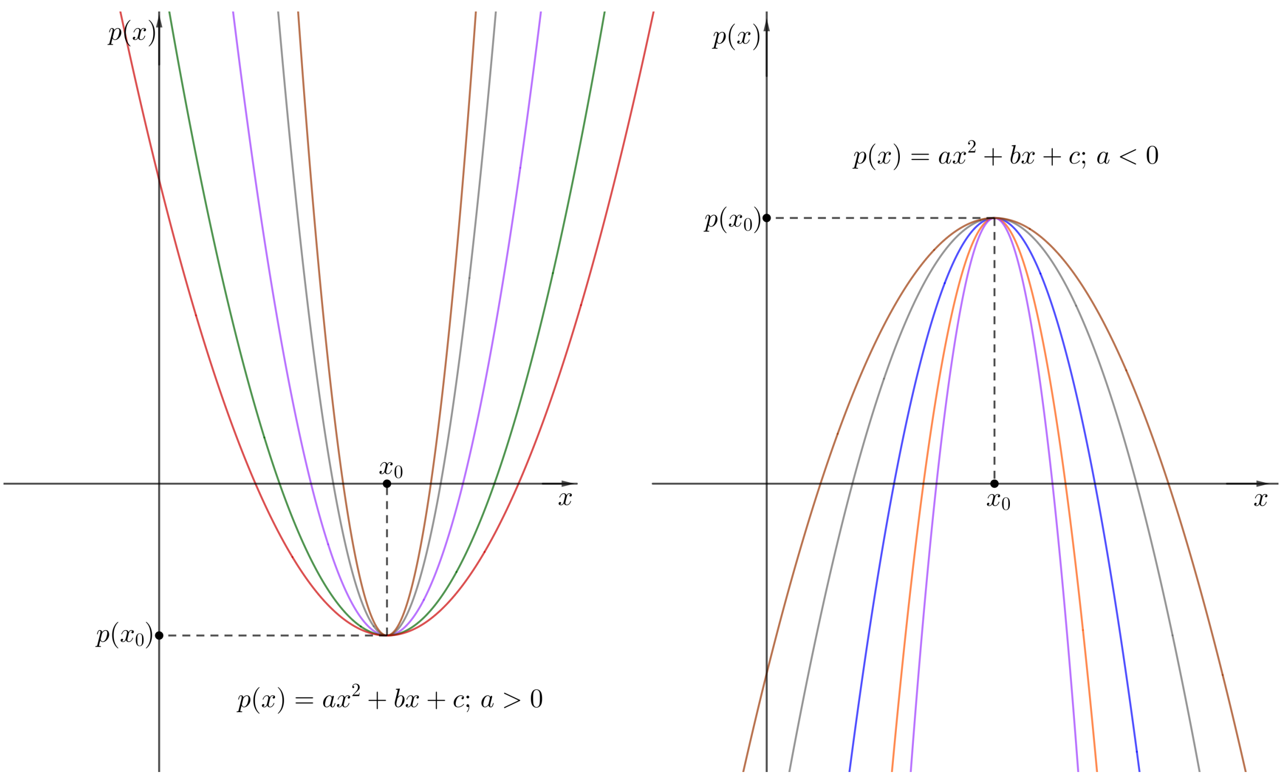


Figura 6: Diferentes formas en que un polinomio de segundo grado puede alcanzar un valor máximo o mínimo.

Aplicaciones: Cualitativo vs. Cuantitativo

1. Imaginemos que desde una carretera recta deseamos fotografiar una montaña cuyas esquinas son los puntos A y B (ver Figura 7, caso 1). ¿Cuál el punto de la carretera que nos da un punto de vista más amplio?

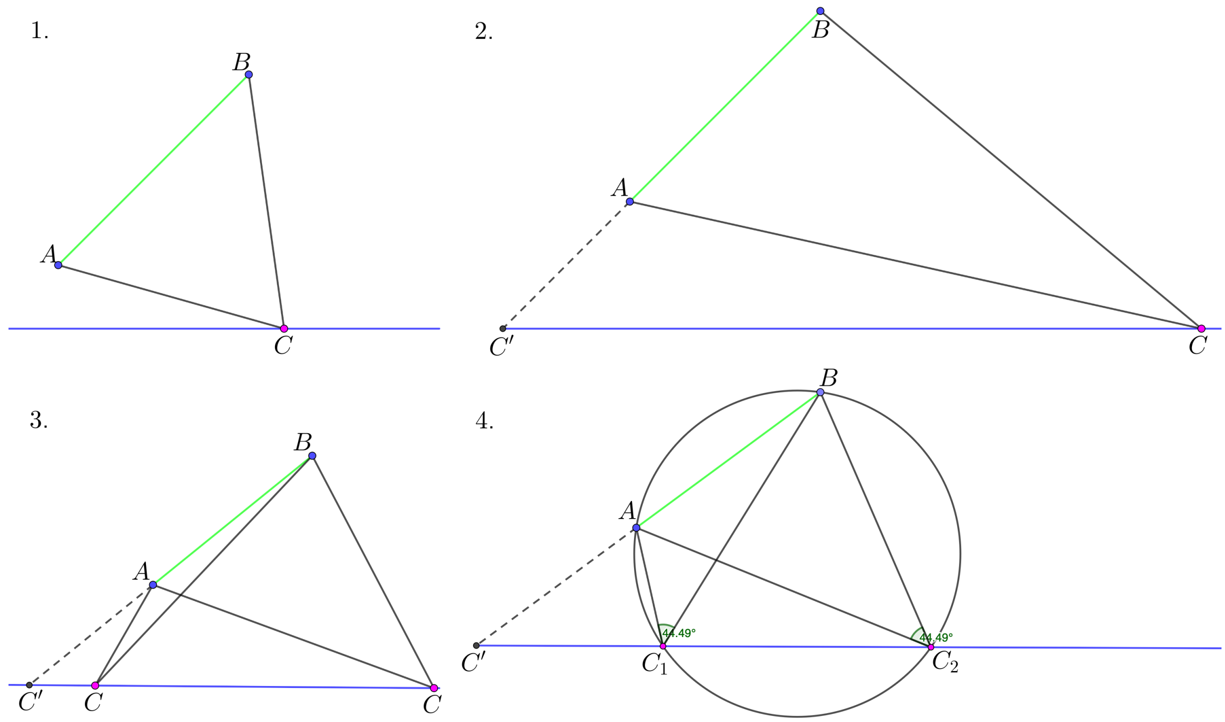


Figura 7

Solución:

1. Primero, notemos que, cuando C es colineal con A y B, el ángulo $\angle ACB = 0°$. Conforme C se mueve hacia la derecha sobre la línea recta azul, el ángulo $\angle ACB$ va incrementando. Buscamos saber cuándo $\angle ACB$ es máximo, pero, ¿existe un valor máximo?

2. Si C esta muy alejado respecto a C', el $\angle CBA \approx 180°$ (ver Figura 7, caso 2), es decir, $\angle ACB \approx 0°$. En suma, si $C \approx C'$, el ángulo $\angle ACB \approx 0°$; si C esta muy alejado de C', el ángulo $\angle ACB \approx 0°$ (ver Figura 7, caso 3); Entonces, primero, debe existir un punto C donde $\angle ACB$ es máximo. Segundo, existen dos valores diferentes de C: C_1 y C_2, tal que $\angle AC_1B = \angle AC_2B$, lo cual nos indica que en C_1 y C_2 no se alcanza el valor máximo del $\angle ACB$ (ver Figura 7, caso 4).

3. Ahora bien, cualitativamente, lo antes mencionado nos describe el comportamiento geométrico de una función, $\theta(x)$, que expresa el cambio del ángulo $\angle ACB$ en función de la posición del punto C sobre la línea recta (azul o eje x), que toma el valor cero cuando C coincide con C', si colocamos el origen de coordenadas en el punto C', y asintótica al eje x cuando el punto C esta muy alejado de C': $\lim_{x\to+\infty} \theta(x) = 0^+$ (ver Figura 8). Por la continuidad de la función,

ya que el procedimiento de dependencia recoge el movimiento continuo del punto C sobre la línea recta -azul-, si $x \approx 0$, $\theta(x) \approx 0$, y si $x \approx +\infty$, $\theta(x) \approx 0$, entonces existen valores diferentes x_1, x_2 tal que $\theta(x_1) = \theta(x_2)$. Lo cual indica, cualitativamente, que la función $\theta(x)$ debe, necesariamente, alcanzar un valor máximo, ya que comienza con valores positivos muy pequeños y termina, conforme C se desplaza continuamente hacia la derecha sobre la línea recta -azul-, con valores positivos muy pequeños (ver Figura 8). Si trazamos líneas rectas paralelas al eje x, estas líneas rectas intersecan en dos puntos a la gráfica de la función $\theta(x)$, pero existe una de estas líneas que interseca en un único punto y no en dos puntos como con las otras líneas rectas. Reflejo, todo lo anterior, del hecho de que si trazamos una circunferencia que circunscribe al triángulo $\triangle ABC$, ésta interseca a la línea recta azul únicamente en dos puntos (ver Figura 7, caso 4) o en único punto cuando la circunferencia sea tangente a la línea recta azul (ver Figura 8). En cuyo caso, la función $\theta(x)$ alcanza su valor máximo.

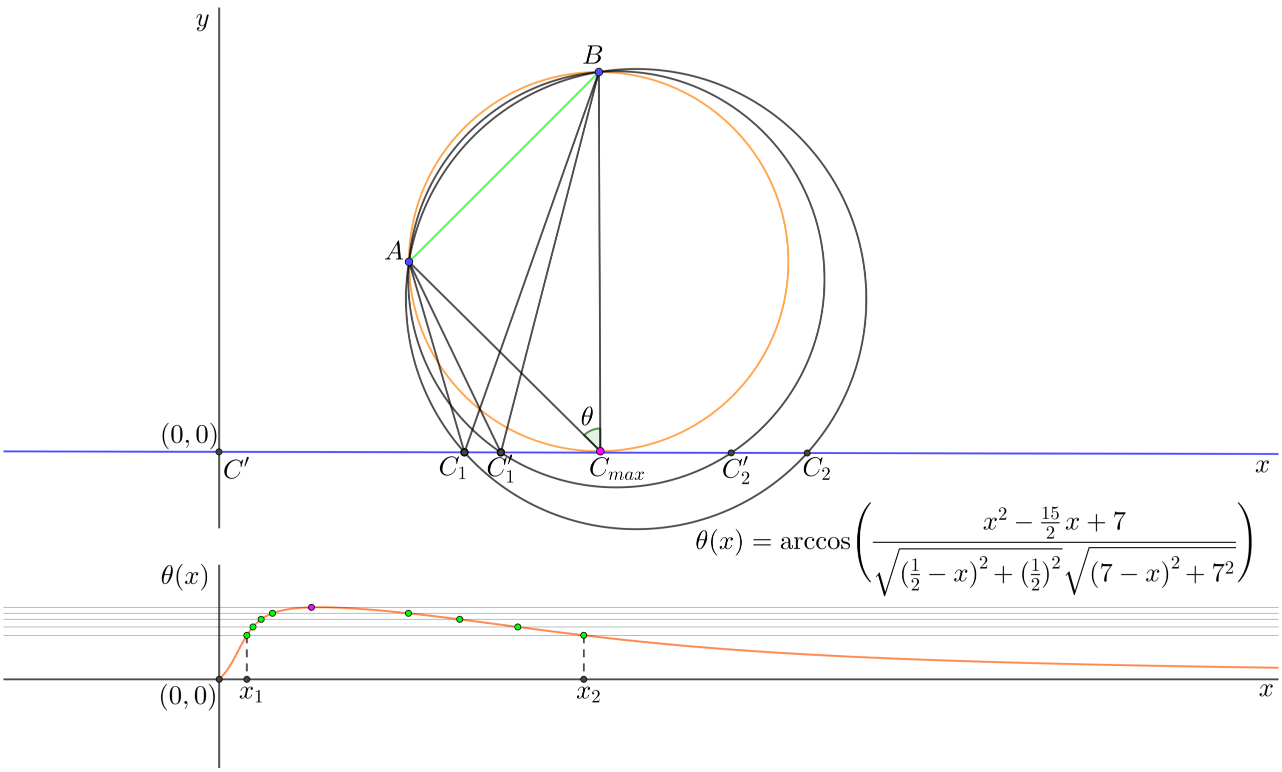


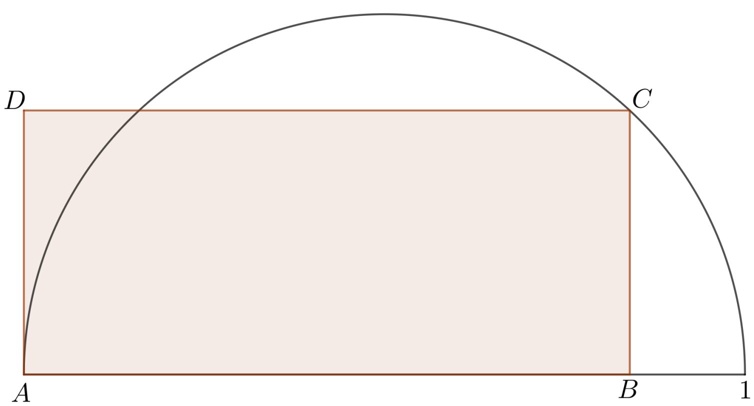
Figura 8

4. Por tanto, el análisis cualitativo nos enseña que la esencia de la búsqueda de valores máximos yace en la idea geométrica de caracterizar una cúspide (ver Figura 8). Y lo correspondiente para un valor mínimo. Por otro lado, se puede mostrar, usando elementos básicos de geometría vectorial o geometría analítica, y, fijando valores para A y B, que $\theta(x)$ tiene como regla de correspondencia:

$$\theta(x) = \arccos\left(\frac{x^2 - \frac{15}{2}x + 7}{\sqrt{(\frac{1}{2} - x)^2 + (\frac{1}{2})^2}\sqrt{(7 - x)^2 + 7^2}}\right)$$

Así, la búsqueda de un valor máximo para $\theta(x)$ requiere encontrar los x's donde se anula la primera derivada: $\theta'(x) = 0$, acto seguido, calcular la segunda derivada, $\theta''(x)$, y corroborar si en esos puntos, ésta, tiene signo negativo, en cuyo caso tendríamos un máximo, que es lo que nos interesa. Omitimos los cálculos antes mencionados, toda vez que, nuestro interés es acentuar el análisis heurístico y resaltar la importancia de lo cualitativo vs. lo cuantitativo. No restando importancia al método analítico naturalmente. Sino conjugar ambos métodos y obtener una comprensión más clara y profunda del tema.

2. Dada una semicircunferencia de diámetro 1 (ver Figura 9) , se busca el punto B que maximice el área del rectángulo $ABCD$.



¿Cuál el punto B que maximiza el área del rectángulo $\square ABCD$?

Figura 9

Solución:

1. Notemos, primero, que si G se mueve continuamente sobre el arco $\overset{\frown}{AB}$ (ver Figura 10), el área del rectángulo $AIGL$ varia de cero, cuando G coincide con A, pasa por el valor $1/4$, equivalente al área del cuadro $ACDE$ cuyo lado es el radio de la semicircunferencia de diámetro AB=1, cuando G coincide con D. Hasta llegar, nuevamente, al valor cero cuando G coincide con B. Así, pues, los valores cuando $G \approx A$ son muy pequeños, después, incrementan hasta volver a decrecer hasta cero cuando $G \approx B$. Y dado que el movimiento de G sobre el arco $\overset{\frown}{AB}$ se realiza continuamente, la función que describe al área del rectángulo $AIGL$ en función de la posicion de G sobre el arco, es una función continua.

2. En suma, tenemos una función continua, $f(x)$, definida sobre el intervalo $[0,1]$ que $f(0)$=0; $f(1/2)$=1/4; $f(1)$=0; si $x \approx 0$, entonces $f(x) \approx 0$; si $x \approx 1$, entonces $f(x) \approx 0$, por la

continuidad de f uno podría conjeturar que, ésta, necesariamente, tiene que alcanzar una valor máximo, toda vez que, cualitativamente su comportamiento geométrico es el de un cúspide, ya que existen valores x_1 y x_2, $x_1 \approx 0$ y $x_2 \approx 1$ tal que $f(x_1)$=$f(x_2)$. Lo cual implica que no solo en x_1 y x_2, $f(x)$ no alcanza un valor máximo sino que este hecho muestra la existencia de un valor máximo, mientras, exista una valor x_0 que no le suceda este comportamiento, es decir, que no existe otro punto $x' \in [0,1]$, x' diferente de x_0, tal que $f(x')$=$f(x_0)$.

3. Partiendo del hecho de que paralelogramos, $EFGD$ y $HBIF$, entorno a la diagonal de un paralelogramo $ABCD$ (ver Figura 10), tienen la misma área. En particular cuando el paralelogramo es un rectángulo. Considerando cualquier posición de G sobre el arco $\overset{\frown}{AB}$, consideramos el rectángulo, $AIGL$, formado por los puntos A y G (ver Figura 10), después, completamos a un rectángulo, $AIFE$, de manera que AE sea igual al radio de la semicircunferencia (como se muestra en la Figura 10). Al moverse G sobre el arco $\overset{\frown}{AB}$, el cuadrado $ACDE$ va a permanecer fijo, de manera que los únicos vértices que cambiarán del rectángulo $AIFE$ serán F e I. Trazando la diagonal AF, y considerando a J como la intersección de AF con LG; H la intersección de LG con DC; N y O la intersección de una línea paralela al lado CD que pasa por J. Entonces al moverse G sobre el arco $\overset{\frown}{AB}$, H se moverá sobre DC y J sobre la diagonal AF. Así, cuando G coincide con D, H y J, también, coinciden con D.

   Ahora bien, cuando G coincide con D (ver Figura 10), el rectángulo $AIGL$ coincide con el rectángulo $ACDE$ pero cuando G yace en el arco $\overset{\frown}{DB}$, el área del rectángulo $AIGL$ es mayor que el área del cuadrado $ACDE$, si el punto O yace en el segmento CB (como se muestra en la Figura 10), en caso contrario, el área del rectángulo $AIGL$ es menor que el área del cuadrado $ACDE$, si el punto O yace en el segmento AC (ver Figura 11). Y si O coincide con C, es decir, J coincide con H, entonces el área del rectángulo $AIGL$ es igual al área del cuadrado $ACDE$ (ver Figura 11). En efecto, el área del rectángulo $OIGJ$ es igual al área del rectángulo $LJNE$ (ver Figura 10), así el área del rectángulo $AIGL$ es igual al área del rectángulo $AONE$, que es mayor que el área del cuadrado $ACDE$; Análogamente, el área del rectángulo $OIGJ$ es igual al área del rectángulo $LJNE$ (ver Figura 11), así el área del rectángulo $AIGL$ es igual al área del rectángulo $AONE$, que es menor que el área del cuadrado $ACDE$; el área del rectángulo $OIGJ$ es igual al área del rectángulo $LJNE$ (ver Figura 11), así el área del rectángulo $AIGL$ es igual al área del rectángulo $AONE$, que es igual que el área del cuadrado $ACDE$.

4. Por tanto, hemos mostrado que 1/4 no es valor máximo, ya que cuando G=D, es decir, cuando x_1=1/2 el valor de $f(x_1)$=1/4, y cuando $J = H$, digamos cuando AI:=x_2, $f(x_2)$=1/4 (ver Figura 11). Además, cuando G coincide con D, O coincide con C, así conforme G comienza a desplazarse sobre el arco $\overset{\frown}{DB}$, el punto O comienza a desplazarse sobre el segmento CB, moviéndose O hacia B pero existe un momento en que O comienza a desplazarse hacia C, ya que existe un momento en que O tiene que yacer sobre el segmento AC, para que el área del rectángulo $AIGL$ se aproxime a cero nuevamente, como cuando G estaba muy cerca del vértice A. Esta posición de G que hace que el punto O regrese hacia C, nuevamente, es la posición donde la función $f(x)$ alcanza su valor máximo.

5. Analíticamente, si colocamos el origen de coordenadas en uno de los extremos, A, del diámetro de la semicircunferencia (ver Figura 9), haciendo AB=x; CB=y, la ecuación de la semicircunferencia sería $(x-\frac{1}{2})^2$+y^2=$(\frac{1}{2})^2$, y despejando y, obtenemos, y=$\sqrt{(\frac{1}{2})^2-(x-\frac{1}{2})^2}$. Así, el

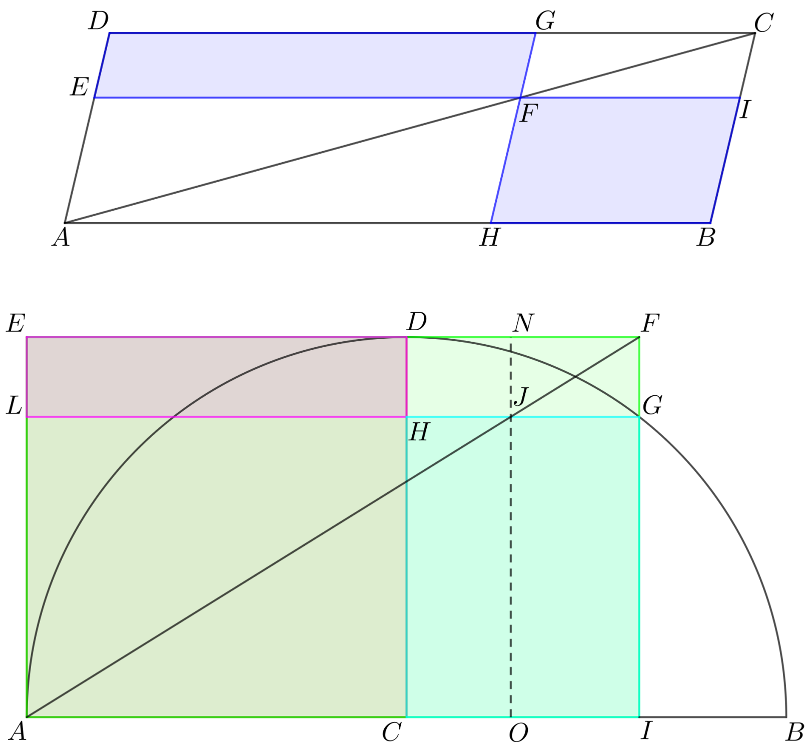


Figura 10

área del rectángulo sería, $x \cdot y$, como función de x, $f(x)= x \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{x^3 - x^4}$.

Por otro lado, $x^3 - x^4 = x^3(1-x)$, así, cuando $x \approx 0$, $(1-x) \approx 1$. Entonces, $\sqrt{x^3 - x^4} \approx x^{3/2}$; cuando $x \approx 1$, $x^3 \approx 1$. Entonces, $\sqrt{x^3 - x^4} \approx \sqrt{1-x}$; $f(0)=0$; $f(1)=0$. Entonces, cualitativamente, $f(x)$ tiene el comportamiento geométrico que se muestra en la Figura 12.

6. Ahora bien, lo analizado anteriormente, se corrobora en el esbozo geométrico de la gráfica de $f(x)$, ya que, si trazamos líneas rectas paralelas al eje x, estas siempre intersecan a la gráfica de la función en dos puntos diferentes, salvo una línea de éstas que toca en un solo punto, que se corresponde con el valor máximo de $f(x)$; Derivando $f(x)$ e igualando a cero obtenemos que los x's posibles donde $f(x)$ puede alcanzar un máximo o mínimo es $x=3/4$. Después, calculando la segunda derivada y evaluando en este punto obtenemos que en $x=3/4$ hay un valor máximo. Por ultimo, nótese que a pesar de que en $x=0$ y $x=1$ se alcanza un valor mínimo, allí la derivada de la función tiene una indeterminación, y los criterios analíticos antes analizados no se pueden aplicar para estos casos.

3. ¿Cuál la distancia más corta desde un punto dado a una línea recta dada?

Solución:

1. Sea l la línea recta dada y O el punto dado (que no pertenece a l); consideremos cualesquiera tres puntos $A; B; C$ sobre l (ver Figura 13). Con centro O y radio $\overline{OA}$; $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$, trazamos tres circunferencias: C_1, C_2 y C_3. Éstas, intersecan a la línea recta l en dos puntos, A, A'; B, B'

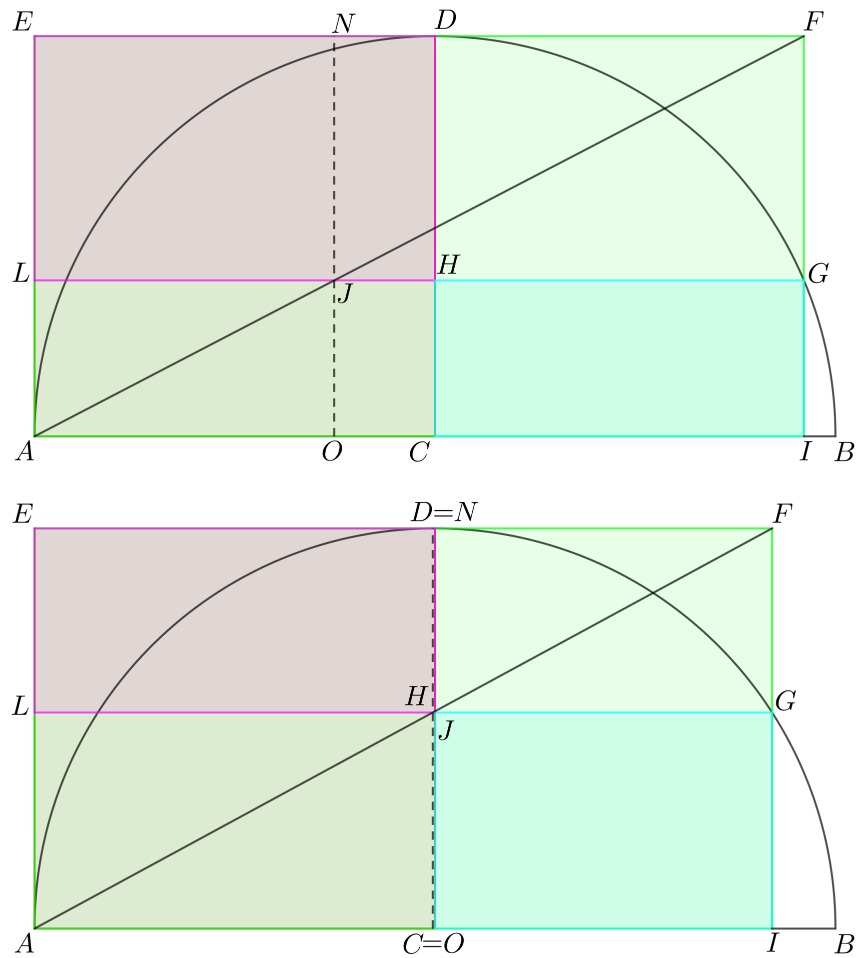


Figura 11

y C, C', respectivamente. Así, tenemos que, $\overline{OA}=\overline{OA'}$; $\overline{OB}=\overline{OB'}$ y $\overline{OC}=\overline{OC'}$. Pero, existe una circunferencia con centro O que toca a la línea recta l en único punto, P, (ver Figura 13). Éste, determina la distancia más corta, $\overline{OP}$, del punto O a la línea recta l. Toda vez que, como hemos analizado en los casos anteriores, si colocamos el origen en el punto P, y expresamos la distancia de O a un punto A' sobre l como función de las coordenadas de $A'=(x,0)$, entonces $f(x)=\sqrt{x^2+a^2}$, donde $O=(0,a)$. Cuando A' esta muy alejado del origen, $\overline{OA'}\approx+\infty$; Cuando A esta muy alejado del origen, $\overline{OA}\approx+\infty$. Es una función simétrica respecto al eje y, es decir, $f(-x)=f(x)$. Y dado que P es punto de tangencia de la circunferencia C, el ángulo $\angle APO=90°$. Así, los ángulos $\angle ABO$; $\angle ACO$ son obtusos, ya que son ángulos externos de los triángulos $\triangle BCO$; $\triangle CPO$, respectivamente (el ángulo externo es mayor que cualquiera de los ángulos internos opuestos). De esta forma, los ángulos restantes del triángulo $\triangle ABO$; $\triangle BCO$, respectivamente, son agudos. Y dado que a ángulo mayor se opone lado mayor (en cualquier triángulo), entonces $\overline{OA}>\overline{OB}>\overline{OC}$, es decir, que si $A\approx P$ o $A'\approx P$, la distancia del punto O a la línea recta l va disminuyendo. En otras palabras, $\overline{OP}$ es el valor mínimo de $f(x)$.

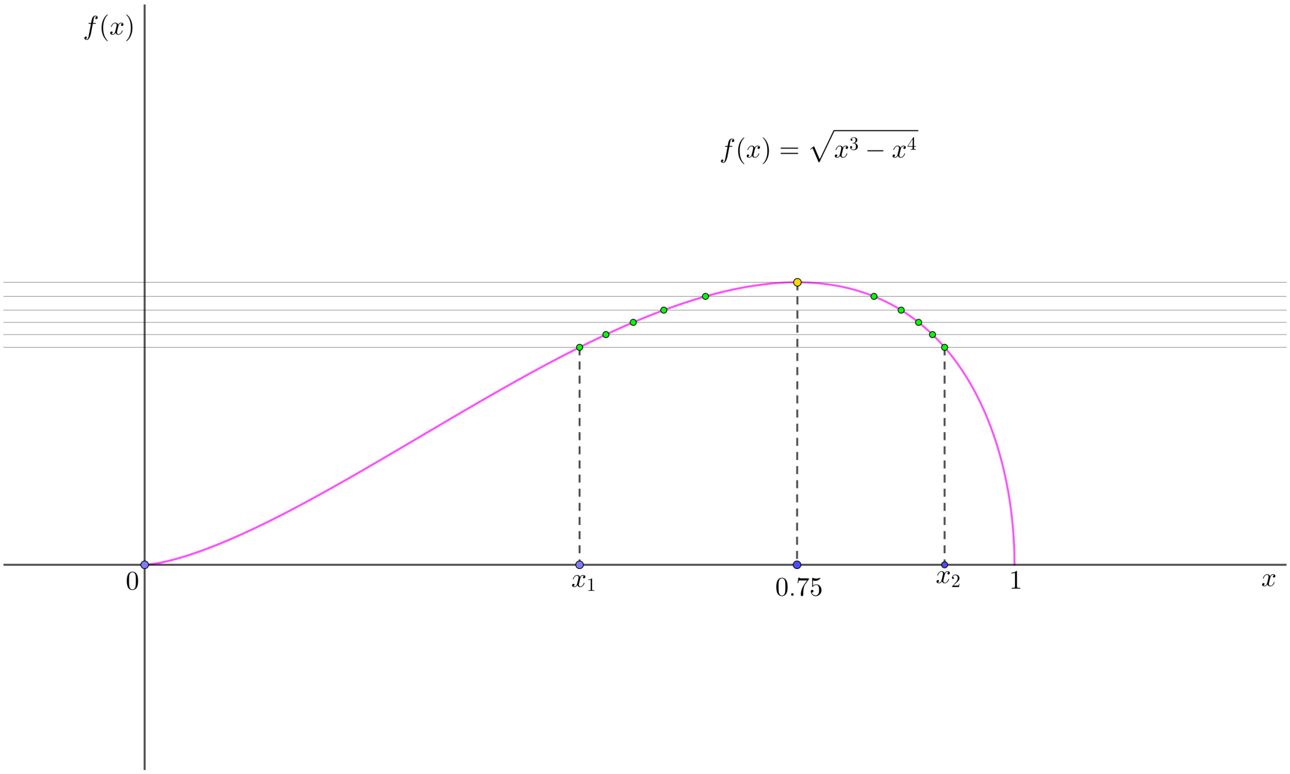


Figura 12

2. Todo lo esbozado anteriormente se refleja en el comportamiento geométrico de la gráfica de $f(x)$ (ver Figura 14). El valor mínimo de $f(x)$ se coteja con el hecho de que P es punto de tangencia de l con C; los valores simétricos que toma $f(x)$ (puntos color verde) con el hecho de que C_1; C_2; C_3 intersecan en dos puntos a l y, por ende, $\overline{OA}= \overline{OA'}$; $\overline{OB}= \overline{OB'}$ y $\overline{OC}= \overline{OC'}$.

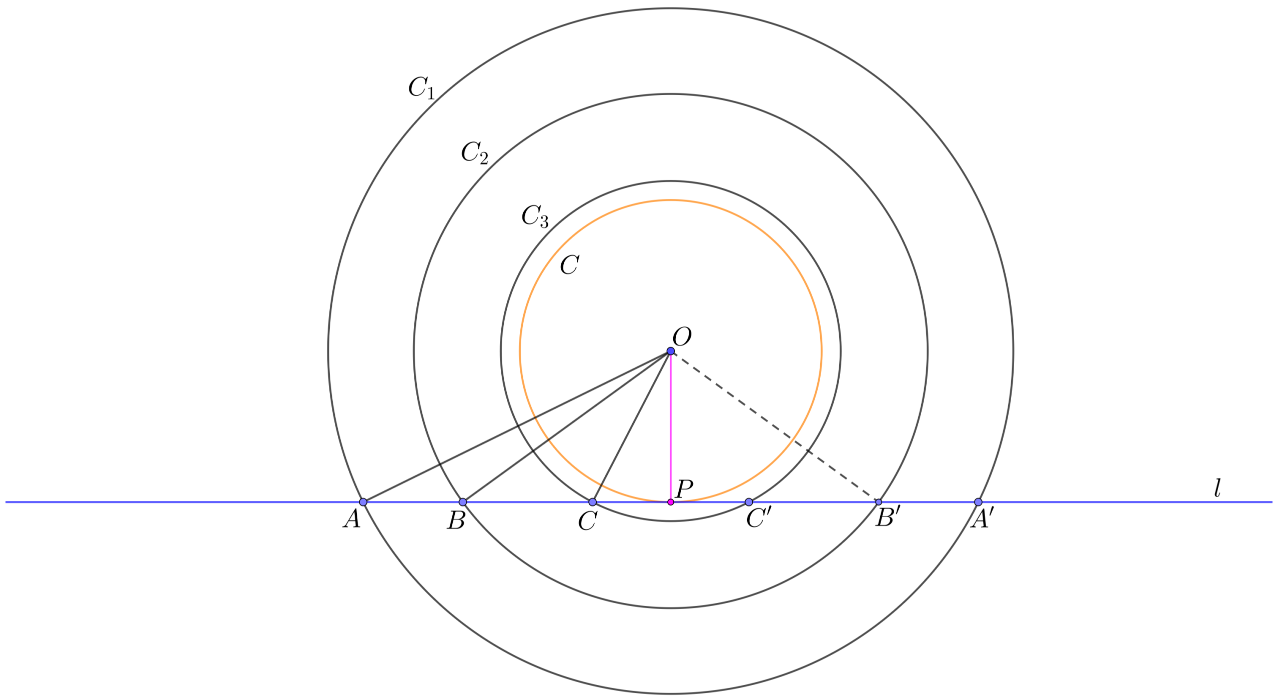


Figura 13

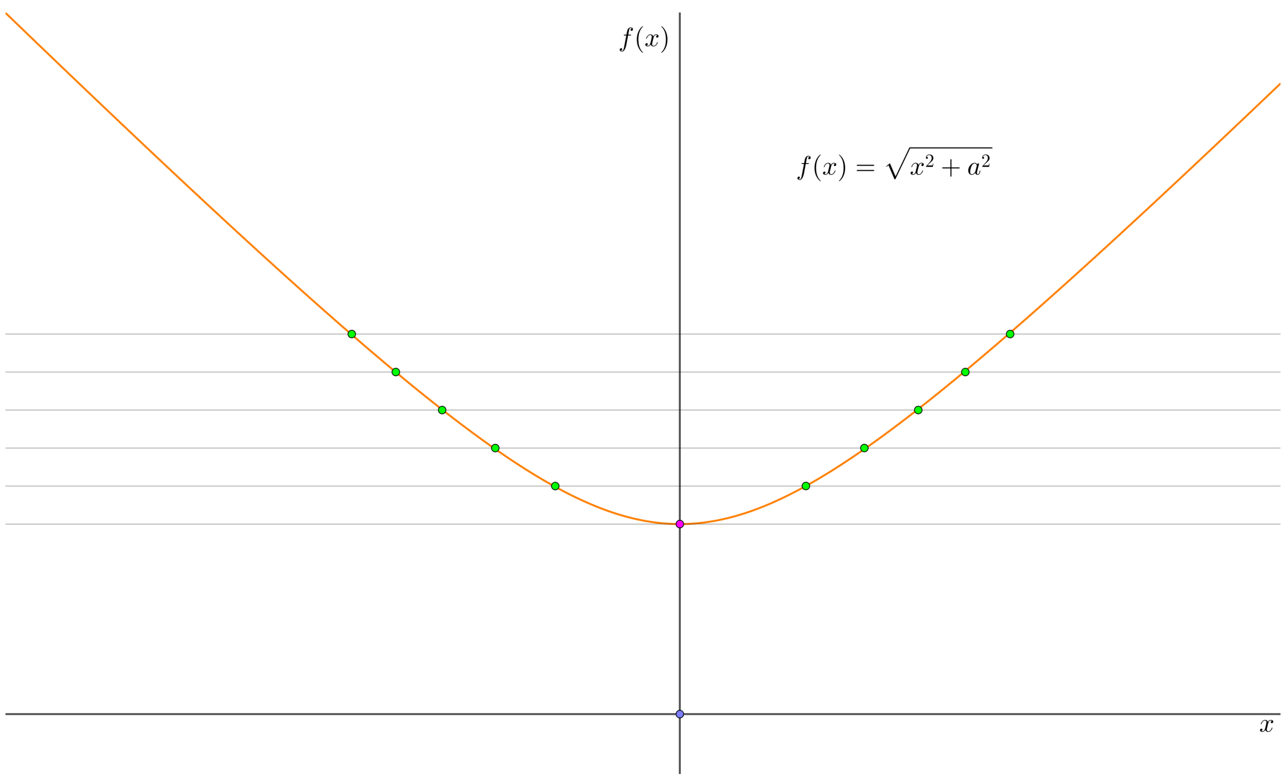


Figura 14