Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

Polinomio de Taylor y Forma de Cauchy del Residuo

Prof. Israel Ramos García

Objetivo General

Hacer notar el papel que juega la fórmula del binomio, y su generalización, en el desarrollo en serie de potencias de una función. Asimismo, motivar el *Polinomio de Taylor* como el caso de un polinomio de interpolación *infinitesimal* que, a su vez, refleja la necesidad de cargar con un error (o residuo) cuando se busca generalizar la fórmula binomio para cualquier potencia, no necesariamente natural, sino racional, y en general, cualquier número real.

Pedagogía

Proveer y desarrollar, a través del análisis comparativo de las fuentes originales, capacidades de pensamiento crítico e innovador propias del quehacer científico.

La Fórmula del Binomio en el Desarrollo de la Teoría de Funciones

Dado el lado, a, de un cuadrado, estamos interesados en saber cómo cambia el cuadrado, $(a+b)^2$, cuyo lado es el resultado de aumentar el lado a por una cantidad cualquiera b. Sabemos del álgebra geométrica, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (ver Figura 1, caso 1). Consecuencia, este hecho, de otro que reza, paralelogramos entorno a la diagonal de un paralelogramo cualquiera tienen la misma área (ver Figura 1, caso 2).

Análogamente, dado el lado, a, de un cubo, estamos interesados en saber cómo cambia el cubo, $(a+b)^3$, cuyo lado es el resultado de aumentar el lado a por una cantidad cualquiera b. Sabemos del álgebra geométrica, $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (ver Figura 2).

En general

$$(a+b)^n = ?$$

Sabemos del álgebra elemental,

$$(a+b)^n = a^n + A^n_{n-1}a^{n-1}b + A^n_{n-2}a^{n-2}b^2 + \cdots + A^n_2 a^2 b^{n-2} + A^n_1 ab^{n-1} + b^n,$$

donde los coeficientes A^n_i, con $i \in \{1, \ldots, (n-1)\}$, a su vez, forman parte de los coeficientes del n-ésimo renglón del Triángulo de Pascal (ver Figura 3).

Ahora bien, se puede mostrar que los coeficientes A^n_i del n-ésimo renglón del Triángulo de Pascal, a su vez, se pueden determinar a través de conocer el término general, d^m_n,[1] de la diagonal del Triángulo de Pascal. (ver Figura 3).

Problema. *Determinar el término general de cualquier diagonal del triángulo de Pascal.*

- $1, 2, 3, 4, \ldots, d^1_n$
- $1, 3, 6, 10, \ldots, d^2_n$

[1] $d^m_n :=$ n-ésimo término de la m-ésima diagonal

1. 2.

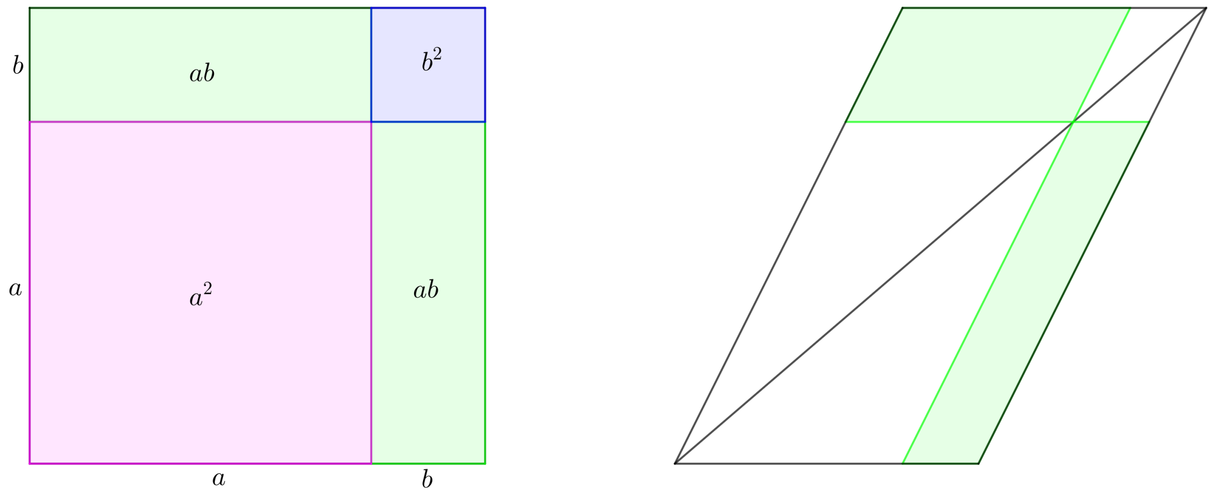

Figura 1

- $1, 4, 10, 20, \ldots, d_n^3$

  $\vdots$

- $1, d_2^n, d_3^n, d_4^n, \ldots, d_n^n$

A la luz de lo que nos aguarda, haremos énfasis en el siguiente hecho que nos permitirá no solo encontrar el término general de cualquier diagonal del triángulo de Pascal sino que permitirá, su versión infinitesimal, generalizar la fórmula del binomio.

Lema (Polinomio de Interpolación)**.** *El polinomio, $p(x)$, de grado n que toma los valores y_0 (en $x = 0$), y_1 (en $x = 1$), $\ldots$, y_n (en $x = n$), es dado por la fórmula.*

$$p(x) = y_0 + \frac{x}{1} \cdot \Delta y_0 + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} \cdot \Delta^2 y_0 + \cdots + \frac{x(x-1)\cdots(x-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdots n} \cdot \Delta^n y_0,$$

donde

$$\begin{array}{rcl} \Delta y_i & = & y_{i+1} - y_i \\ \Delta^2 y_i & = & \Delta y_{i+1} - \Delta y_i \\ \Delta^3 y_i & = & \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i \\ & \vdots & \\ \Delta^n y_i & = & \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i \end{array}$$

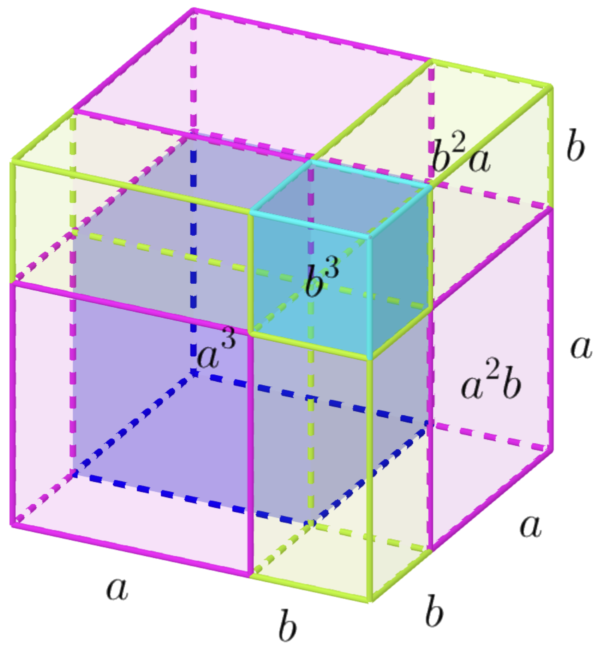

Figura 2

En aras de la brevedad omitiremos la prueba del lema anterior, no sin hacer observar a nuestro amable lector que un polinomio de grado n queda determinado de manera única con $(n+1)$-puntos del plano por donde pasa. Hecho que determina la forma de $p(x)$. Por otro lado, hacer notar que los coeficientes, $\Delta^i y_0$, que determinan el polinomio de interpolación conforman uno de los lados del llamado *Triángulo de Diferencias* (ver Figura 4). En otras palabras, conociendo la base -resaltada de color verde- podemos conocer el lado -resaltado de color naranja- Así, pues, basta determinar el triángulo de diferencias para poder determinar de manera práctica el polinomio de interpolación.

De esta forma, podemos calcular: el polinomio de interpolación, $p_1(x)$, que pasa por los valores, $y_0 = 1; y_1 = 2; y_2 = 3$, primeros tres términos de la primera diagonal del triángulo de Pascal, con el triángulo de diferencias (ver Figura 5, caso I), obteniendo que $p_1(x) = x + 1$. Evaluando en $n-1$, $p_1(n-1) = n$, obtenemos el n-ésimo término de la primera diagonal, $d_1^n = \dfrac{n}{1}$; el polinomio de interpolación, $p_2(x)$, que pasa por los valores, $y_0 = 1; y_1 = 3; y_2 = 6; y_3 = 10$, primeros cuatro términos de la segunda diagonal del triángulo de Pascal, con el triángulo de diferencias (ver Figura 5, caso II), obteniendo que $p_2(x) = \dfrac{x^2+3x+2}{2} = \dfrac{(x+1)(x+2)}{2}$. Evaluando en $n-1$, $p_2(n-1) = \dfrac{n(n+1)}{2}$, obtenemos el n-ésimo término de la segunda diagonal, $d_2^n = \dfrac{n(n+1)}{1\cdot 2}$; el polinomio de interpolación, $p_3(x)$, que pasa por los valores,$y_0 = 1; y_1 = 4; y_2 = 10; y_3 = 20; y_4 = 35$, primeros cinco términos de la tercera diagonal del triángulo de Pascal, con el triángulo de diferencias (ver Figura 5, caso III), obteniendo que $p_3(x) = \dfrac{x^3+6x^2+11x+6}{6} = \dfrac{(x+1)(x+2)(x+3)}{1\cdot 2\cdot 3}$.

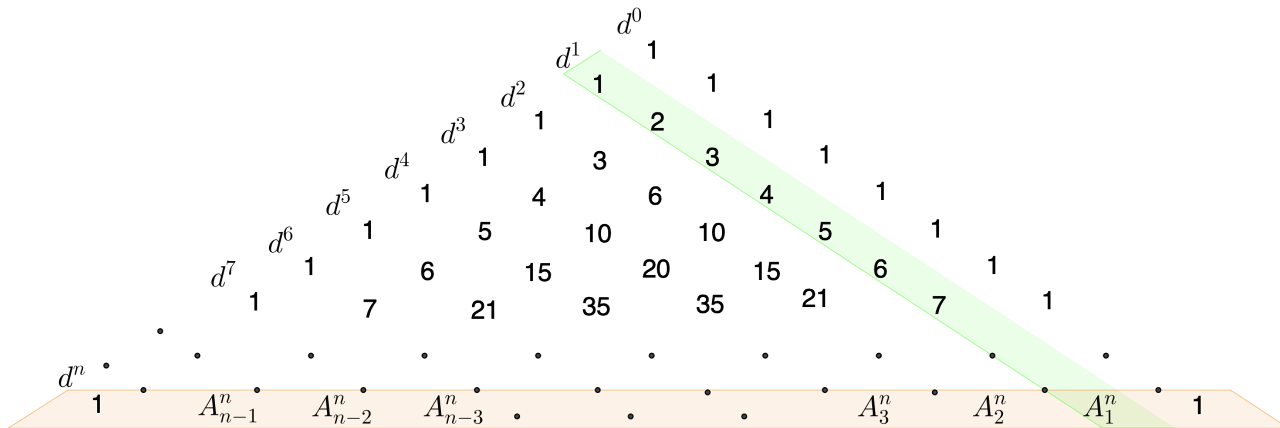

Figura 3: Triángulo de Pascal

Evaluando en $n-1$, $p_3(n-1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}$, obtenemos el n-ésimo término de la tercera diagonal, $d^n_3 = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}$. En general, se puede probar por inducción que,

$$d^n_m = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+(m-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}$$

Nótese que,

$$\begin{aligned} A^n_i &= d^i_{n-(i-1)} \\ &= \frac{(n-(i-1))(n-(i-2))\cdots(n-1)(n)}{1\cdot 2\cdots i} \end{aligned}$$

por tanto,

$$(a+b)^n = a^n + \frac{2\cdot 3\cdots(n)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}a^{n-1}b + \frac{3\cdot 4\cdots(n)}{1\cdot 2\cdots(n-2)}a^{n-2}b^2 + \cdots + \frac{(n-1)(n)}{1\cdot 2}a^2b^{n-2} + \frac{n}{1}ab^{n-1} + b^n$$

Dividiendo entre a^n y simplificando,

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)^n = 1 + \frac{n}{1}\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{(n-1)n}{1\cdot 2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{(n-2)(n-1)n}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{b}{a}\right)^3 + \cdots + \frac{2\cdots(n-2)(n-1)n}{1\cdot 2\cdots(n-1)}\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} + \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Haciendo $x = \dfrac{b}{a}$,

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{(n-1)n}{1\cdot 2}x^2 + \frac{(n-2)(n-1)n}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots + \frac{2\cdots(n-2)(n-1)n}{1\cdot 2\cdots(n-1)}x^{n-1} + x^n \quad (1)$$

Ahora bien, a la luz de la observación que nos aguarda, respecto a reinterpretar la identidad

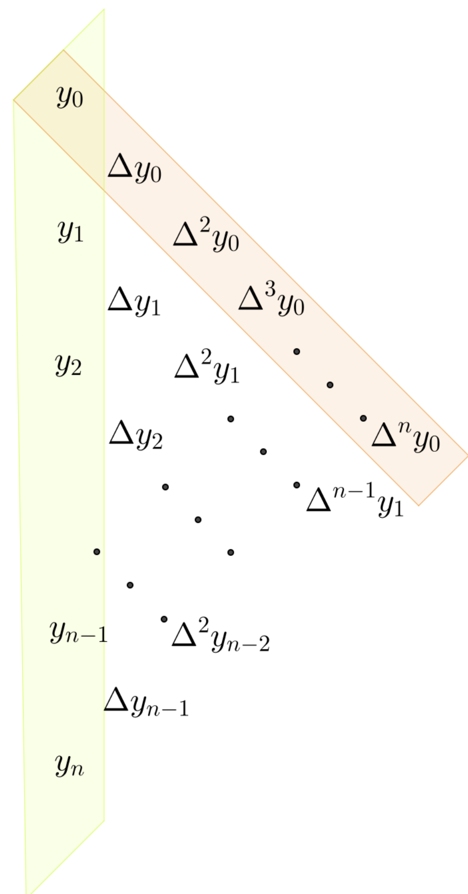

Figura 4: Triángulo de Diferencias

(1) en términos del lenguaje que nos interesa, el siguiente hecho.

Lema (Polinomio de Interpolación infinitesimal)**.** *El polinomio, $p(x)$, de grado n que toma los valores y_0 (en x_0), y_1 (en $x_1 = x_0 + \Delta x$), $\ldots$, y_n (en $x_n = x_{n-1} + \Delta x$), es dado por la fórmula.*

$$p(x) = y_0 + \frac{(x - x_0)}{1} \cdot \frac{\Delta y_0}{\Delta x} + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\Delta^2 y_0}{(\Delta x)^2} + \cdots + \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})}{1 \cdot 2 \cdots n} \cdot \frac{\Delta^n y_0}{(\Delta x)^n},$$

donde

$$\begin{aligned}
\Delta y_i &= y_{i+1} - y_i \\
\Delta^2 y_i &= \Delta y_{i+1} - \Delta y_i \\
\Delta^3 y_i &= \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i \\
&\vdots \\
\Delta^n y_i &= \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i \\
x_i &= x_{i-1} + \Delta x, \ \forall i \in \{1, \ldots, (n-1)\}
\end{aligned}$$

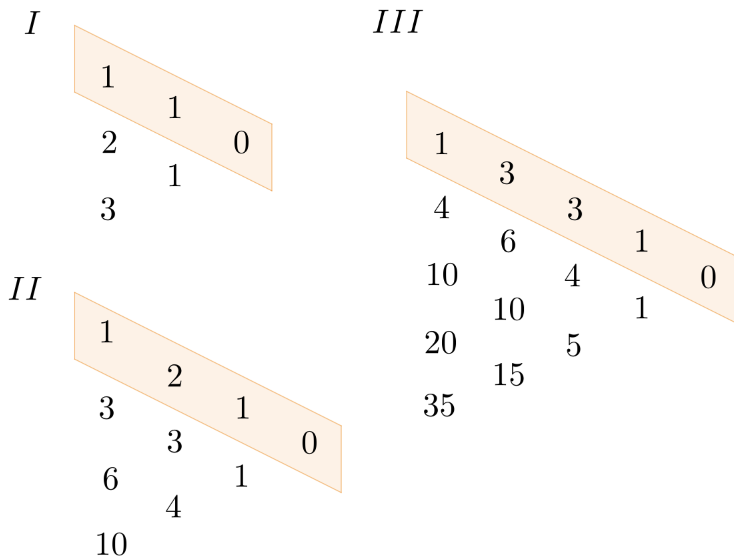

Figura 5: Triángulo de Diferencias

Haciendo $\Delta x \to 0$,

$$
\begin{array}{ccc}
x_1 & \to & x_0 \\
x_2 & \to & x_1 \\
\vdots & & \vdots \\
x_n & \to & x_{n-1}
\end{array}
$$

Así,

$$
\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} (x - x_0)(x - x_1) &= (x - x_0)^2 \\
\lim_{\Delta x \to 0} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) &= (x - x_0)^3 \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
\lim_{\Delta x \to 0} (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) &= (x - x_0)^n
\end{aligned}
$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\
&= \lim_{x_1 \to x_0} \frac{p(x_1) - p(x_0)}{x_1 - x_0} \\
&= p'(x_0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta^2 y_0}{(\Delta x)^2} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[p(x_0 + 2\Delta x) - p(x_0 + \Delta x)] - [p(x_0 + \Delta x) - p(x_0)]}{(\Delta x)^2} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[2p'(x_0 + 2\Delta x) - p'(x_0 + \Delta x)] - [p'(x_0 + \Delta x)]}{2\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2p''(x_0 + 2\Delta x) - p''(x_0 + \Delta x)}{1} \\
&= 2p''(x_0) - p''(x_0) \\
&= p''(x_0)
\end{aligned}$$

En general,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta^n y_0}{(\Delta x)^n} = p^{(n)}(x_0)$$

En suma,

$$\lim_{\Delta x \to 0} p(x) = p(x_0) + \frac{p'(x_0)}{1}(x - x_0) + \frac{p''(x_0)}{1 \cdot 2}(x - x_0)^2 + \cdots \frac{p^{(n)}(x_0)}{1 \cdot 2 \cdots n}(x - x_0)^n$$

Haciendo $x_0 = 0$,

$$\lim_{\Delta x \to 0} p(x) = p(0) + \frac{p'(0)}{1}x + \frac{p''(0)}{1 \cdot 2}x^2 + \cdots \frac{p^{(n)}(0)}{1 \cdot 2 \cdots n}x^n$$

Ahora bien, haciendo $p(x) = (1 + x)^n$, tenemos

$$\begin{aligned}
p'(x) &= n \cdot (1 + x)^{n-1} \\
p''(x) &= (n - 1) \cdot n \cdot (1 + x)^{n-2} \\
p'''(x) &= (n - 2) \cdot (n - 1) \cdot n \cdot (1 + x)^{n-3} \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
p^{(n)}(x) &= 1 \cdot 2 \cdots (n - 1) \cdot n \cdot (1 + x)^{n-n}
\end{aligned}$$

Evaluando en $x = 0$,

$$p'(0) = n;\ p''(0) = (n - 1) \cdot n;\ p'''(0) = (n - 2) \cdot (n - 1) \cdot n; \ldots;\ p^{(n)} = 1 \cdot 2 \cdots (n - 1) \cdot n$$

Por tanto,

$$\lim_{\Delta x \to 0} p(x) = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{(n-1)\cdot n}{1\cdot 2}x^2 + \frac{(n-2)\cdot(n-1)\cdot n}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots + \frac{1\cdot 2\cdots(n-1)\cdot n}{1\cdot 2\cdots n}x^n$$

Observación. $(1+x)^n$ *coincide con el polinomio de grado* n *que más se parece a* $(1+x)^n$ *alrededor del cero.*

Generalización de la Fórmula del Binomio[2]

En analogía a lo observado para el caso n natural, ¿se cumple la fórmula del binomio para $n = -1$, $(a+b)^{-1} = a^{-1} + \ldots$? O, ¿se cumple la fórmula del binomio para $n = 1/2$, $(a+b)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} + \ldots$? Más aún, ¿se cumple la fórmula del binomio para potencias fraccionarias: $(a+b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} + \ldots$? En general, ¿se cumple la fórmula del binomio para potencias cuyo valor es cualquier número real, $(a+b)^t = a^t + \ldots$?

1.

$$\begin{aligned} (a+b)^{-1} &= \frac{1}{a+b} \\ &= \frac{1}{a\cdot(1+\frac{b}{a})} \\ &= \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+\frac{b}{a}} \end{aligned}$$

Si $|b| < |a|$, es decir, $0 < \left|\frac{b}{a}\right| < 1$:

$$1 + \frac{b}{a} \approx 1,$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{a+b} &= \frac{1}{a\cdot(1+\frac{b}{a})} \\ &= \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+\frac{b}{a}} \\ &\approx \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1} \\ &= \frac{1}{a} \end{aligned}$$

Así,

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \delta;\ 0 < |\delta| < 1$$

[2] Teorema de Pascal-Wallis-Newton-Cauchy

Despejando δ,

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{a+b}{a} + (a+b)\delta \\ &= 1 + \frac{b}{a} + a\delta + b\delta \end{aligned}$$

Por otro lado, $|b\delta| < |a\delta|$,[3] despreciando el término $b\delta$:

$$1 = 1 + \frac{b}{a} + a\delta \Rightarrow \delta = -\frac{b}{a^2}$$

Así

$$\frac{1}{a+b} \approx \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} \Rightarrow \frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \delta;\ 0 < |\delta| << 1$$

Despejando δ,

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{a+b}{a} - (a+b)\cdot\left(\frac{b}{a^2}\right) + (a+b)\delta \\ &= 1 + \frac{b}{a} - \frac{b}{a} - \left(\frac{b}{a}\right)^2 + a\delta + b\delta \end{aligned}$$

Despreciando el término $b\delta$,

$$0 = -\left(\frac{b}{a}\right)^2 + a\delta \Rightarrow \delta = \frac{b^2}{a^3}$$

Así

$$\frac{1}{a+b} \approx \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} \Rightarrow \frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} + \delta;\ 0 < |\delta| << 1$$

Despejando δ,

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{a+b}{a} - (a+b)\cdot\left(\frac{b}{a^2}\right) + (a+b)\cdot\frac{b^2}{a^3} + (a+b)\delta \\ &= 1 + \frac{b}{a} - \frac{b}{a} - \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{b^3}{a^2} + a\delta + b\delta \end{aligned}$$

Despreciando el término $b\delta$,

$$0 = \left(\frac{b}{a}\right)^3 + a\delta \Rightarrow \delta = -\frac{b^3}{a^4}$$

Así

[3] $|b\delta| < |a\delta| \Leftrightarrow \frac{|b\delta|}{|a\delta|} < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{b}{a}\right| < 1$

$$\frac{1}{a+b} \approx \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} \Rightarrow \frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \delta;\ 0 < |\delta| << 1$$

En general,

$$\frac{1}{a+b} \approx \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \cdots + (-1)^n \frac{b^n}{a^{n+1}} \Rightarrow \frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \cdots + (-1)^n \frac{b^n}{a^{n+1}} + \delta;\ 0 < |\delta| << 1$$

Por tanto,

$$\frac{1}{1+\frac{b}{a}} = \frac{a}{a+b} = 1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3} + \cdots + (-1)^n \frac{b^n}{a^n} + a\delta;\ 0 < |\delta| << 1$$

Haciendo $x = \frac{b}{a}$,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \delta';\ 0 < |\delta'| << 1$$

Es decir,

$$(1+x)^{-1} \approx 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n;\ |x| < 1$$

En suma:

$$\begin{aligned}(1+x)^{-1} &\approx 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n \\ &= 1^{-1} \cdot x^0 + \frac{-1}{1}(1^{-2}x^1) + \frac{(-2)(-1)}{1 \cdot 2}(1^{-3}x^2) + \cdots + \frac{(-n) \cdot (-(n-1)) \cdots (-2)(-1)}{1 \cdot 2 \cdots (n-1)(n)}(1^{-1-n}x^n)\end{aligned}$$

¡¡Se cumple la fórmula del binomio para $n = -1$!!

2.

$$\begin{aligned}(a+b)^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{a+b} \\ &= \sqrt{a \cdot \left(1 + \frac{b}{a}\right)}\end{aligned}$$

Si $|b| < |a|$, es decir, $0 < \left|\frac{b}{a}\right| < 1$:

$$1 + \frac{b}{a} \approx 1,$$

entonces

$$\begin{aligned}(a+b)^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{a+b}\\ &= \sqrt{a\cdot\left(1+\frac{b}{a}\right)}\\ &\approx \sqrt{a}\cdot\sqrt{1}\end{aligned}$$

Así,

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a}+\delta;\ 0<|\delta|<1$$

Despejando δ,

$$\begin{aligned}(\sqrt{a+b})^2 &= (\sqrt{a}+\delta)^2\\ &= a+2\sqrt{a}\delta+\delta^2\end{aligned}$$

Por otro lado, $|\delta|<1$, implica $\delta^2 << 1$, despreciando el término δ^2:

$$a+b = a+2\sqrt{a}\delta,$$

por tanto

$$\delta = \frac{b}{2\sqrt{a}}$$

Así

$$\sqrt{a+b} \approx \sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}} \Rightarrow \sqrt{a+b} = \sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}+\delta;\ 0<|\delta|<<1$$

Despejando δ,

$$\begin{aligned}(\sqrt{a+b})^2 &= \left(\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}+\delta\right)^2\\ &= a+b+\frac{b^2}{4a}+2\sqrt{a}\delta+\frac{b}{2\sqrt{a}}\delta+\delta^2\end{aligned}$$

Por otro lado, $|\delta|<1$, implica $\left|\frac{b\delta}{2\sqrt{a}}\right| << |2\sqrt{a}\delta|$ y $\delta^2 << 1$, despreciando los términos $\left|\frac{b\delta}{2\sqrt{a}}\right|$ y δ^2:

$$a+b = a+b+\frac{b^2}{4a}+2\sqrt{a}\delta$$

por tanto

$$\delta = -\frac{b^2}{8\sqrt{a^3}}$$

Así

$$\sqrt{a+b} \approx \sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}} - \frac{b^2}{8\sqrt{a^3}} \Rightarrow \sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}} - \frac{b^2}{8\sqrt{a^3}} + \delta;\ 0 < |\delta| << 1$$

Despejando δ,

$$\begin{aligned}(\sqrt{a+b})^2 &= \left(\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}} - \frac{b^2}{8\sqrt{a^3}} + \delta\right)^2 \\ &= a + b - \frac{b^3}{8a^2} + \frac{b^4}{64a^3} + 2\sqrt{a}\delta + \frac{b}{\sqrt{a}}\delta - \frac{b^2}{4\sqrt{a^3}}\delta + \delta^2\end{aligned}$$

Por otro lado, $|\delta| < 1$ y $\left|\frac{b}{a}\right| < 1$, implica $\left|\frac{b^2}{4\sqrt{a^3}}\right| << \left|\frac{b}{\sqrt{a}}\right|$, $\left|\frac{b^4}{64a^3}\right| << \left|\frac{b^3}{8a^2}\right|$,$\left|\frac{b}{\sqrt{a}}\delta\right| << |2\sqrt{a}\delta|$ y $\delta^2 << 1$, despreciando los términos $\frac{b^4}{64a^3}$, $\frac{b}{\sqrt{a}}\delta$, $\frac{b^2}{4\sqrt{a^3}}\delta$ y δ^2:

$$a + b = a + b - \frac{b^3}{8a^2} + 2\sqrt{a}\delta$$

por tanto

$$\delta = \frac{b^3}{16\sqrt{a^5}}$$

Así

$$\sqrt{a+b} \approx \sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}} - \frac{b^2}{8\sqrt{a^3}} + \frac{b^3}{16\sqrt{a^5}} \Rightarrow \sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}} - \frac{b^2}{8\sqrt{a^3}} + \frac{b^3}{16\sqrt{a^5}} + \delta;\ 0 < |\delta| << 1$$

Dividiendo entre $\sqrt{a}$:

$$\sqrt{1 + \frac{b}{a}} = \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a}} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{b}{a} - \frac{1}{8}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{b}{a}\right)^3$$

Haciendo $x = \frac{b}{a}$,

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$$

Notemos que,

$$\frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{1}$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{8} &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)}{1\cdot 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{16} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)\cdot(\frac{1}{2}-2)}{1\cdot 2\cdot 3} \end{aligned}$$

De esta forma,

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1}x + \frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)\cdot(\frac{1}{2}-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3;\ |x|<1$$

¡¡Se cumple la fórmula del binomio para $n = 1/2$!!

En síntesis:

1. Si n es natural, la fórmula del binomio, $(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} A_i^n x^i$, coincidía con el polinomio de grado n que mejor aproxima a la función $f(x) = (1+x)^n$ alrededor del origen y, los coeficientes de este polinomio estaban en términos de los diferentes ordenes de las derivadas de la función:

$$A_i^n = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$$

2. Haciendo $g(x) = (1+x)^{1/2}$

$$\begin{aligned} g'(x) &= (1/2)\cdot(1+x)^{1/2-1} \\ g''(x) &= (1/2)(1/2-1)(1+x)^{1/2-2} \\ g'''(x) &= (1/2)(1/2-1)(1/2-2)(1+x)^{1/2-3} \\ &\vdots \\ g^{(n)}(x) &= (1/2)(1/2-1)\cdots(1/2-(n-1))(1+x)^{1/2-n} \end{aligned}$$

Evaluando en $x = 0$,

$$\begin{array}{rcl} g'(0) & = & (1/2) \\ g''(0) & = & (1/2)(1/2-1) \\ g'''(x) & = & (1/2)(1/2-1)(1/2-2) \end{array}$$

De esta forma,

$$g(x) \approx g(0) + \frac{g'(0)}{1!}(x-0) + \frac{g''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{g'''(0)}{3!}(x-0)^3;\ |x| < 1$$

3. Análogamente, haciendo $h(x) = (1+x)^{-1}$

$$\begin{array}{rcl} h'(x) & = & (-1)\cdot(1+x)^{-1-1} \\ h''(x) & = & (-1)(-2)(1+x)^{-2-1} \\ h'''(x) & = & (-1)(-2)(-3)(1+x)^{-3-1} \\ \vdots & & \vdots \\ h^{(n)}(x) & = & (-1)(-2)\cdots(-n)(1+x)^{-n-1} \end{array}$$

Evaluando en $x = 0$,

$$\begin{array}{rcl} h'(0) & = & (-1) \\ h''(0) & = & (-1)(-2) \\ h'''(x) & = & (-1)(-2)(-3) \\ \vdots & & \vdots \\ h^{(n)}(x) & = & (-1)(-2)\cdots(-n) \end{array}$$

De esta forma,

$$h(x) \approx h(0) + \frac{h'(0)}{1!}(x-0) + \frac{h''(0)}{2!}(x-0)^2 + \cdots + \frac{h^n(0)}{n!}(x-0)^n;\ |x| < 1$$

4. De los análisis antes mencionados estamos tentados a conjeturar que, si $f(x) = (1+x)^t$, con $t \in \mathbb{R}$; $|x| < 1$, entonces la fórmula del binomio generalizada para exponente cualquier número real, t, viene dada por encontrar el polinomio de grado n que más se parece a la función alrededor de una vecindad del origen:

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \cdots + \frac{f^n(0)}{n!}(x-0)^n;\ |x| < r;\ \text{p.a.}\ r \in \mathbb{R}$$

5. En general, cuándo podemos garantizar la existencia de un polinomio de grado n que mejor aproxime a una función dada, $f(x)$, en un vecindad, $V_r(x_0)$, de un punto dado x_0:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^n(0)}{n!}(x-x_0)^n;\ |x-x_0| < r;\ \text{p.a. } r \in \mathbb{R}$$

Polinomio de Taylor

Hemos notado que lo que diferencia, a la fórmula del binomio para n natural de otros valores no naturales, es la necesidad de aproximar el cálculo del binomio a través de un polinomio que, conforme el grado es cada vez mayor, éste se parece más (o se aproxima con menor error) al binomio en una vecindad del origen (ver Figuras 6 y 7).

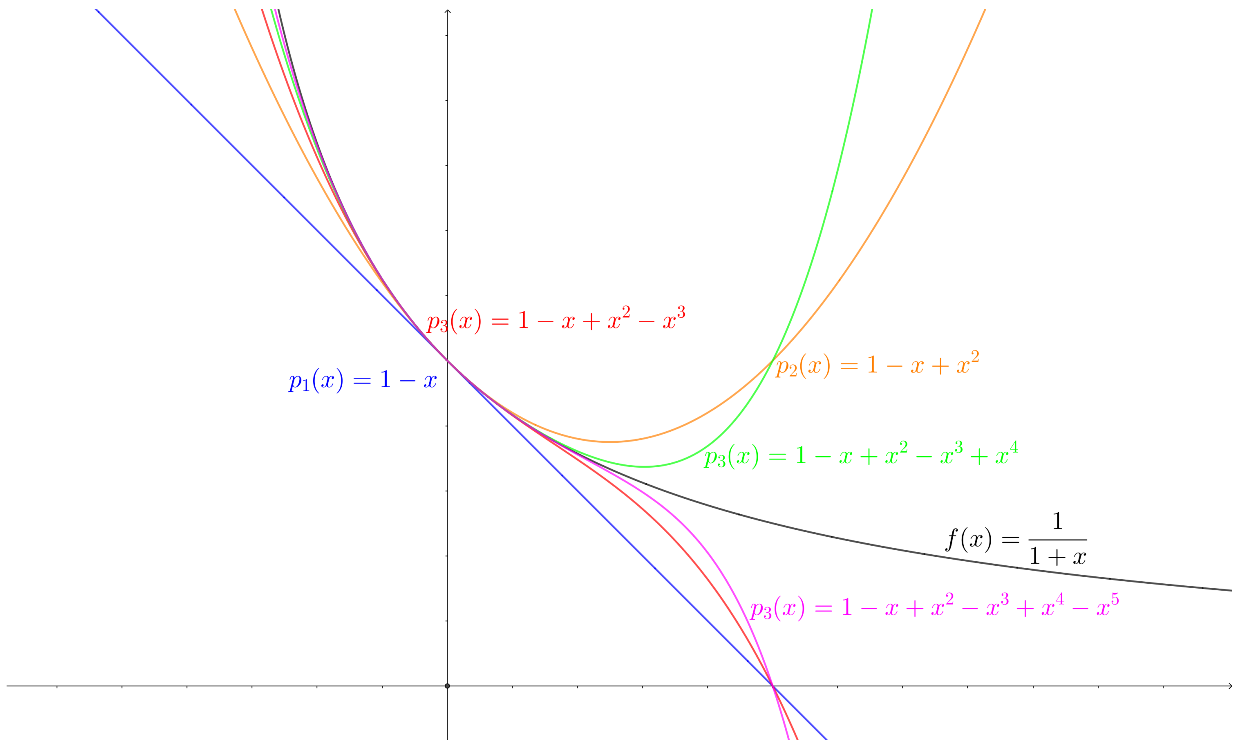

Figura 6: Aproximación a $f(x) = (1+x)^{-1}$, alrededor del origen, con polinomios de grados: $1, 2, 3, 4$ y 5

Lo antes mencionado motiva el siguiente hecho.

Proposición. *Sea $f(x)$ una función continua sobre $[x_0, x]$ y $k+1$-veces diferenciable sobre (x_0, x). Entonces, existe $\xi \in (x_0, x)$ tal que*

$$f(x) = \underbrace{\sum_{i=0}^{k} \frac{(x-x_0)^i}{i!} f^{(i)}(x_0)}_{\textit{Polinomio de Taylor}} + \underbrace{\frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi)}_{\textit{Residuo de Cauchy}}$$

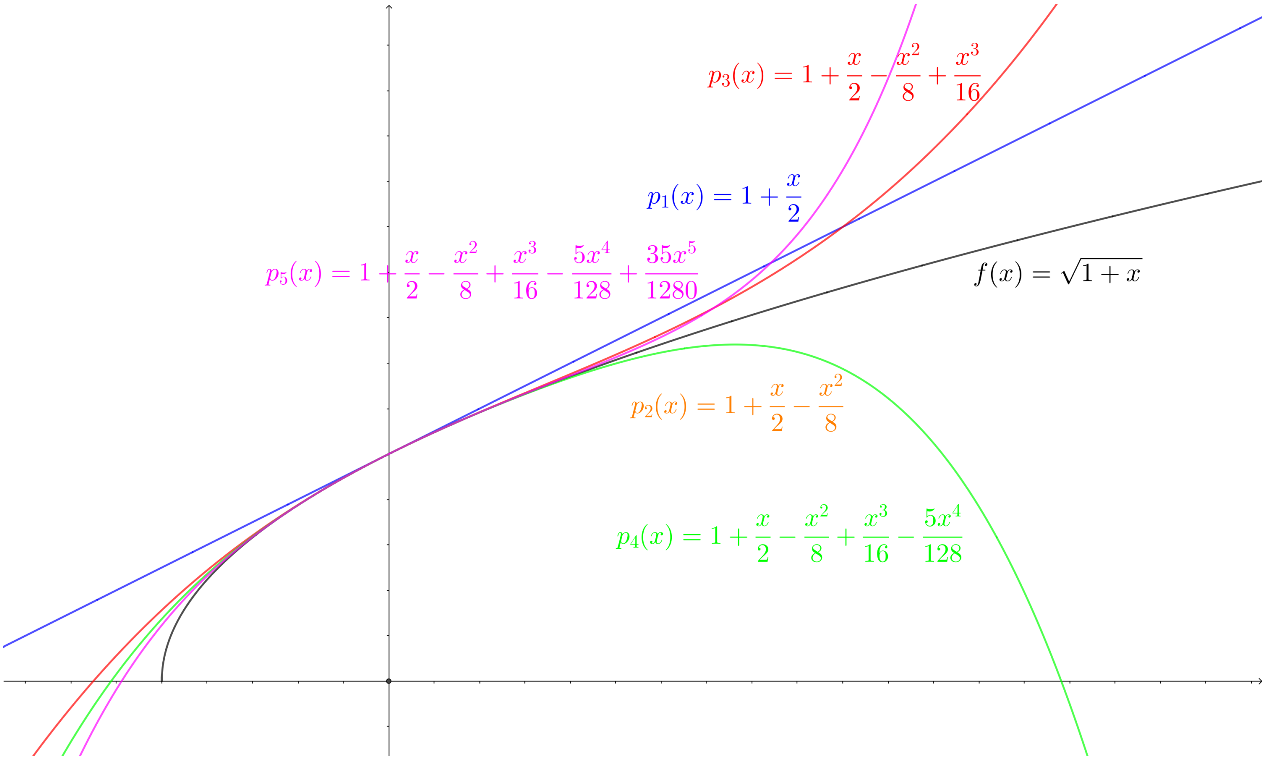

Figura 7: Aproximación a $f(x) = (1+x)^{1/2}$, alrededor del origen, con polinomios de grados: $1, 2, 3, 4$ y 5

Demostración. Sea

$$R_k(x) = f(x) - \sum_{i=0}^{k} \frac{(x-x_0)^i}{i!} f^{(i)}(x_0);\ S_k = \frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!}$$

Así, tenemos

$$R_k(x_0) = 0,\ R_k'(x_0) = 0, \ldots,\ R_k^{(k)}(x_0) = 0,$$

y, análogamente,

$$S_k(x_0) = 0,\ S_k'(x_0) = 0, \ldots,\ S_k^{(k)}(x_0) = 0,$$

Aplicando la siguiente proposición.

Proposición. *Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas sobre $[a,b]$ y diferenciables sobre (a,b). Si $g'(x) \neq 0$ para $a < x < b$, entonces $g(b) \neq g(a)$ y existe $\xi \in (a,b)$ tal que*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

varias veces, obtenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{R_k(x)}{S_{k(x)}} &= \frac{R_k(x)-R_k(x_0)}{S_k(x)-S_k(x_0)} = \frac{R_k'(\xi_1)}{S_k'(\xi_1)} = \frac{R_k'(\xi_1)-R_k'(x_0)}{S_k'(\xi_1)-S_k(x_0)} \\
&= \frac{R_k''(\xi_2)}{S_k''(\xi_2)} = \frac{R_k''(\xi_2)-R_k''(x_0)}{S_k''(\xi_2)-S_k''(x_0)} = \frac{R_k'''(\xi_3)}{S_k'''(\xi_3)} = \cdots = \frac{R_k^{k+1}(\xi_{k+1})}{S_k^{k+1}(\xi_{k+1})},
\end{aligned}
$$

donde ξ_1 yace entre x y x_0, ξ_2 yace entre ξ_1 y x_0, y así sucesivamente. Por otro lado, $S_k^{(k+1)}(x) = 1$ y $R_k^{(k+1)}(x) = f^{(k+1)}(x)$. De esta forma,

$$
R_k(x) = S_k(x) \cdot f^{k+1}(\xi),
$$

con $\xi = \xi_{k+1}$. Es decir,

$$
f(x) - \sum_{i=0}^{k} \frac{(x-x_0)^i}{i!} f^{(i)}(x_0) = \frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!} \cdot f^{k+1}(\xi),
$$

así

$$
f(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(x-x_0)^i}{i!} f^{(i)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!} \cdot f^{k+1}(\xi)
$$

□

