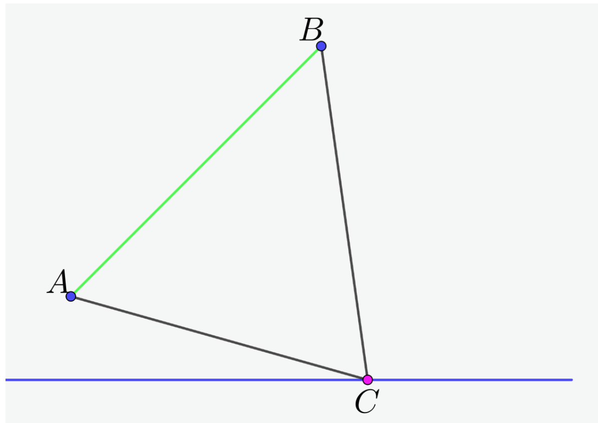
Taller de Resolución de Problemas

Prof. Israel Ramos García

1. En un triángulo $\triangle ABC$, $\overline{AB}$ es el lado más grande. Muestre que para cualquier P en el interior del triángulo, $\overline{PA} + \overline{PB} > \overline{PC}$
2. Existe un punto P en el interior de un triángulo equilatero $\triangle ABC$ tal que $\overline{PA} = 3$, $\overline{PB} = 4$ y $\overline{PC} = 5$. Encuentre la longitud del lado del triángulo.
3. Muestre que las cuatro proyecciones del vértice A del triángulo $\triangle ABC$ sobre las bisectrices exterior e interior de los ángulos en B y C, respectivamente, son colineales.
4. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que las diagonales AC y BD son perpendiculares, y sea P su intersección. Muestre que las reflexiones de P respecto a AB, BC, CD, y AD son conciclicos.
5. Sea P un punto interior de un círculo tal que existen tres cuerdas a través de P de igual longitud. Muestre que P es el centro del círculo.
6. Para un punto P en el interior de un ángulo $\angle xOy$, encuentre $A \in Ox$ y $B \in Oy$ tal que $P \in AB$ y $AP \cdot BP$ sea mínimo.
7. Divida un triángulo equilátero en seis, siete y ocho triángulos equiláteros. ¿Se puede dividir en cualquier número aún mayor de triángulos equiláteros?
8. Dados tres cuadrados con lados 2, 3, y 6, realice solo dos cortes y vuelva a ensamblar las 5 piezas resultantes en un cuadrado cuyo lado sea igual a 7.
9. Se tiene una cuadrícula de 6×6 y baldosas de 1×2. ¿De cuántas formas se pueden colocar estas baldosas de manera que no se traslapen y llenen la cuadrícula?
10. Se tiene una cuadrícula de $N \times N$ y tres colores. ¿De cuántas formas se pueden colocar los colores en la cuadrícula de manera que no haya vecinos adyacentes del mismo color?
11. Se tiene una fila para entrar al cine, la entrada cuesta 1 USD y la taquilla inicialmente no tiene dinero para dar cambio. Hay m personas con billetes de 1 USD y n personas con billetes de 0.5 USD en la fila. ¿De cuántas formas se pueden acomodar las personas de la fila de manera que la fila nunca se detenga?
12. Encuentra para que n's y m's se cumple:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = m^2$$

13. Imaginemos que desde una carretera recta deseamos fotografiar una montaña cuyas esquinas son los puntos A y B (ver Figura). ¿Cuál es el punto de la carretera que nos da un punto de vista más amplio?
14. Dada una semicircunferencia de diámetro 1 (ver Figura), se busca el punto B que maximice el área del rectángulo $ABCD$ (sin usar cálculo).
15. ¿Puede una función continua, acotada superiormente e inferiormente, con domino acotado y definida en un intervalo semiabierto, $[a, b)$ o $(a, b]$, alcanzar su valor máximo o mínimo?



16. Demuestre que si una recta corta a una hipérbola en dos puntos, prolongada en ambos sentidos, encontrará a las asíntotas, y las rectas cortadas en ella por la sección de las asíntotas serán iguales (sin usar geometría analítica o geometría vectorial).

17. Den un ejemplo, en caso de que exista (si no demuestren lo contrario), de una sucesión que tenga:

    a) Un único punto de acumulación, acotada, pero que sea divergente.
    b) Ningún punto de acumulación pero que sea convergente.
    c) Un conjunto finito de puntos de acumulación y no acotada.
    d) Un conjunto infinito numerable de puntos de acumulación y acotada.
    e) Un conjunto infinito numerable de puntos de acumulación y divergente.

18. Muestre que las sucesiones

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 7}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{7\cdot 11}\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+3)} \\ b_n &= \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

    son sucesiones de Cauchy y encuentren sus límites.

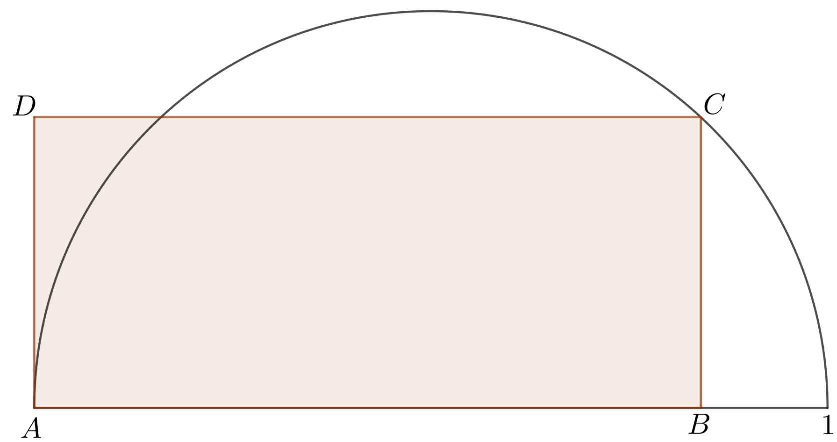
19. Calcule todos los puntos de acumulación de la sucesión

$$\{a_n\}=\{p_{11},p_{21},p_{22},p_{31},p_{32},p_{33},p_{41},p_{42},\ldots\}, \quad p_{kl}=\sum_{i=l}^{k}\frac{1}{i^2}$$

20. Sea $ABCDE$ una espiral (de Arquímedes) descrita en la primera revolución, el punto A el origen de la espiral, AE la primera recta origen de la revolución, y $EFGHI$ el primer círculo. ¿Por qué el área de la espiral es la tercera parte del círculo $EFGHI$? (sin usar cálculo).

21.

    Problema (Pappus)**.** *Si son dadas tres (o cuatro) líneas rectas en posición, y si son trazadas otras líneas rectas desde un mismo punto formándose ángulos conocidos con las tres líneas (o*



¿Cuál el punto B que maximiza el área del rectángulo $\square ABCD$?

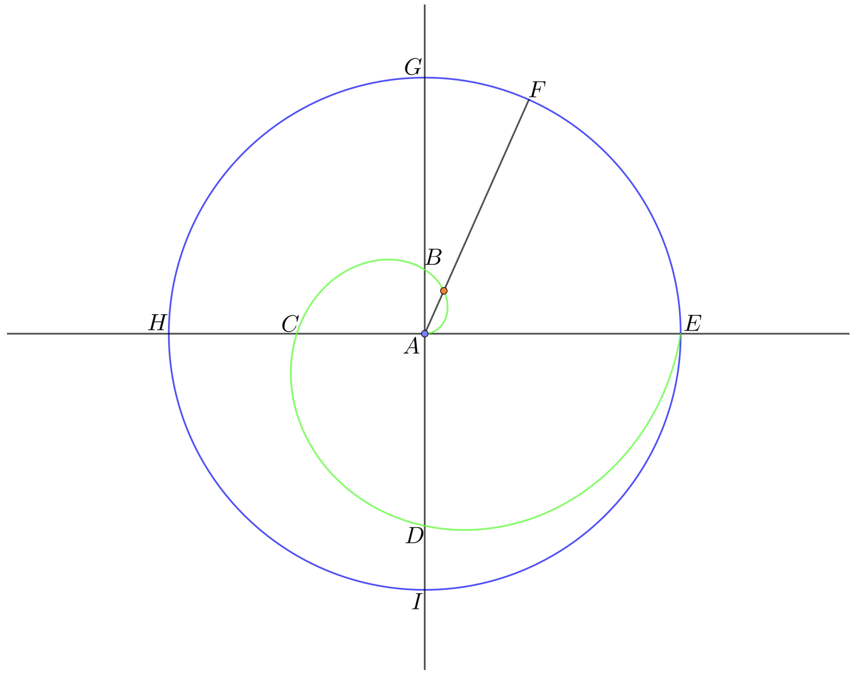
cuatro líneas) dadas, y si, a su vez, es conocida la proporción del rectángulo formado por dos de las líneas rectas trazadas con el cuadrado de la otra (o el rectángulo formado por las otras dos), entonces, demuestre que, el punto se encuentra en un lugar sólido, dado en posición, es decir, sobre una de las tres secciones cónicas.

En general, si se tiene un número mayor de cuatro rectas dadas en posición, se solicita hallar en primer lugar un punto desde el cual se pudiesen trazar tantas líneas rectas, una sobre cada una de las dadas, formando ángulos dados, de modo que el paralelepípedo formado por tres guarde una proporción dada con el paralelepípedo construido sobre las dos restantes y otra línea dada, si hay cinco líneas; si hay seis, que el paralelepípedo construido sobre tres guarde una proporción dada con el paralelepípedo construido sobre las otras tres; si hay siete, que el resultado obtenido cuando se multipliquen cuatro de ellas entre sí, guarde una proporción dada con el resultado de la multiplicación de las otras tres y también de una línea dada; si hay ocho, que el resultado obtenido cuando se multipliquen cuatro de ellas entre sí, guarde una proporción dada con el resultado de la multiplicación de las otras cuatro. De este modo, el problema se puede extender a cualquier número de líneas rectas dadas. Es necesario, pues, conocer y trazar el lugar geométrico donde yacen todos los puntos para un número mayor de cuatro líneas rectas dadas.

22. ¿Por qué Euclides no descubrió la trigonometría?

23. Demuestre que todo polinomio de grado impar con coeficientes reales, $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, siempre tiene una raíz real, α_0, sin recurrir al principio de continuidad (para mostrar su existencia).

24. Dado un dodecaedro de lado l, inscrito en una esfera de radio r, expresar el lado en términos



del radio.

25. **Sobre el problema fundamental de la filosofía**

> Yo comprendo muy bien cómo se puede poner, según la regla de la *identidad*, una consecuencia en virtud de un principio, puesto que mediante el análisis de los conceptos se descubre que aquélla está comprendida en éste. Y así, la necesidad es principio de la inmutabilidad, la composición es principio de la divisibilidad, la infinitud es principio de la omnisciencia, etc., etc. Y yo puedo comprender fácilmente esta conexión del principio con la consecuencia, porque la consecuencia se identifica realmente con un concepto parcial del principio. Y en cuanto que ella esta implicada en él, de acuerdo con la regla de la coincidencia, es puesta por él. Cómo, en cambio, algo se deriva de algo *distinto*, pero no según la identidad, es algo que me gustaría mucho que me aclararan. Llamo a la primera clase de principio el principio lógico, porque su relación a la consecuencia puede ser captada lógicamente, es decir, claramente según la regla de la identidad. En cambio, al principio de la segunda clase lo llamo principio real, porque, aunque esa relación pertenece sin duda a mis conceptos verdaderos, su naturaleza no puede ser definitiva de modo alguno mediante un juicio. Por lo que concierne a este principio real y a su relación con la consecuencia, mi pregunta se formula de esta forma sencilla: ¿cómo puedo yo entender que, *porque algo es, algo distinto (también) es?* Una consecuencia lógica sólo se establece propiamente porque es idéntica al principio. El hombre puede faltar; el principio de esta falibilidad reside en la finitud de su naturaleza, ya que, si descompongo el concepto de un espíritu finito, veo al momento que la falibilidad reside en él, es decir, que coincide con aquello que está incluido en el concepto de un espíritu (finito). Ahora bien, la voluntad de Dios contiene el principio real de

> la existencia del mundo. La voluntad divina es algo. El mundo existente es algo totalmente distinto. Y, no obstante, el uno es puesto por el otro.[1]

26. En el modelo de competencia de dos especies se puede mostrar que no hay ciclos límites, es decir, no hay trayectorias cerradas del sistema. Ahora bien, si consideramos el modelo de competencia de tres especies: planta, herbívoro y polinizador, ¿el sistema tiene ciclos límites?

27. Determinar para qué ángulos, el problema de Pappus para tres y cuatro líneas, determina como lugar geométrico una circunferencia.

28. ¿Cómo calculaba Arquímedes?

29. Realizar *análisis* y *síntesis* del Teorema de Ceva y Teorema de Menelao.

30. Pruebe que para toda n natural
$$\binom{2n}{n}$$
es divisible por $n+1$

31. Encuentre una función, $f(x)$, continua y derivable, tal que $f'(x_0) \neq 0$ en una vecindad de x_0 y no sea invertible.

32. Supongamos que en una de las casillas de un tablero de ajedrez se halla un caballo. Es preciso recorrer con él las restantes 63 casillas, pasando por cada una de ellas una sola vez.

33. *a*) ¿Será posible construir un cuadrado con 8 fichas del dominó, tal, que cualquier línea recta trazada en él interseque, por lo menos una ficha?
    b) ¿Se puede construir un cuadrado con 18 fichas del dominó que satisfaga las condiciones del inciso *a*)?
    c) ¿Será posible construir un rectángulo con 15 fichas del dominó que satisfaga las condiciones del inciso *a*)?

34. Coloque “boca abajo” todas las fichas del dominó sin los dobles. Esconda una ficha, sin que nadie se dé cuenta, pero que no sea doble. Después proponga a alguien tomar una ficha cualquiera, mirarla y ponerla sobre la mesa “boca arriba”. A continuación, pídale que descubra las restantes fichas del dominó y que la una conforme a las reglas del dominó comenzando por la primera que descubrió, pero sin cerrar el juego. Las fichas tomarán cierta posición en la fila, ¿pueden anticipar la cantidad de puntos que se obtienen en cada extremo de esta fila? Justifiquen su respuesta (varíen el procedimiento antes mencionado).

35. *a*) Supongamos que tenemos un tablero de ajedrez y 32 fichas del dominó, cada una de ellas con un tamaño igual a dos casillas del tablero. En una casilla cualquiera del tablero ponemos un peón. ¿Será posible después cubrir la parte restante del tablero con las fichas del dominó, de tal forma que ninguna de ellas sobresalga del tablero y que no haya fichas encimadas?

[1] *Opúsculos de la filosofía natural*, Immanuel Kant, pp. 161-162.

b) Poner dos peones en dos ángulos opuestos del tablero. ¿Será posible cubrir la parte restante del tablero con las fichas del dominó, observando las condiciones del inciso anterior?

c) Poner dos peones en dos casillas de diferente color. ¿Será posible cubrir la parte restante del tablero con las fichas del dominó?

d) ¿Cuántas figuras del ajedrez será preciso poner en un tablero para que en él no se pueda colocar ni una ficha del dominó?

36. Sean $X = \mathbb{Z}^+$ y $S = S_X$ el grupo de todas las permutaciones de X. Sea F el subgrupo de S que consta de todas las permutaciopnes que mueven sólo un número finito de elementos de X. El subgrupo generado por los 3-ciclos, denotado por A_∞, es ***el grupo alternante infinito***. Demostrar que A_∞ es un grupo simple infinito.

37. Sea $f(x)$ una función real tal que
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{e^x} = 1$$
y $|f''(x)| < c|f'(x)|$ para toda x suficientemente grande. Pruebe que
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{e^x} = 1$$

38. Demuestre que el perímetro de una sección plana arbitraria de un tetraedro es menor que el perímetro de una de las caras del tetraedro.

39. Sea H un conjunto de números reales que no consta únicamente de 0 y es cerrado bajo suma. Además, sea $f(x)$ una función de valores reales definida en H y que satisface las siguientes condiciones:
$$f(x) \leq f(y) \text{ si } x \leq y \text{ y } f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in \mathrm{H}).$$
Demuestre que $f(x) = cx$ en H, donde c es un número no negativo.

40. ¿Existe una función $f(x, y)$ de dos variables reales que toma como valores números naturales y para la cual $f(x, y) = f(y, z)$ implica $x = y = z$?

41. Sean $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ el conjunto de los números racionales y el conjunto de los números reales, respectivamente, y sea $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ una función con la siguiente propiedad. Para todo $h \in \mathbb{Q}, x_0 \in \mathbb{R}$,
$$f(x+h) - f(x) \to 0$$
cuando $x \in \mathbb{Q}$ tiende a x_0. ¿Se sigue que f está acotada en algún intervalo?

42. Resolver la siguiente ecuación con regla y compás
$$c^2 \cdot x = a^2 \cdot b,$$
donde a, b y c son constantes reales.

43. Sea X un subconjunto no numerable de números reales.

a) Demuestre que X tiene un punto de acumulación.

b) ¿En qué espacios, más generales, podrías hacer la misma afirmación?

44. Demuestre que la definición de cónica como lugar geométrico[2] es equivalente a la definición de cónica como configuración Papussiana.[3]

45. Sea F un punto y l una línea recta que no contiene a aquél. Encuentre el lugar geométrico de los puntos tal que la razón de las distancias a un punto fijo, F, llamado foco y a una línea recta, l, es una constante k (cualquier número real).

46. Demuestre que si la función no identicamente cero $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, satisface la identidad:

$$f(x)f(y) = f(x+y); \;\; x, y \in \mathbb{R}$$

y es diferenciable en el punto $x = 0$, entonces dicha función f es infinitamente diferenciable en cualquier punto $x \in \mathbb{R}$.

47. Dar un ejemplo de una función (discontinua) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que satisfaga las condiciones

a) $g(x) \neq x$

b) $g(g(g(x))) = x, \;\; x \in \mathbb{R}$.

48. Se tienen dos semicircunferencias iguales que hacen contacto una con otra de modo que sus diámetros se encuentran en una misma recta. Trazamos a éstas una tangente común e inscribimos una circunferencia que haga contacto con esta tangente y las dos semicircunferencias dadas; luego, inscribimos una segunda circunferencia que haga contacto con la primera y las dos dadas, a continuación, trazamos una tercera circunferencia que haga contacto con la segunda y las dos dadas y así sucesivamente *ad infinitum* (ver Figura). Utilizando esta construcción, demostrar que, cuando n aumenta indefinidamente, la suma

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

tiende a la unidad, es decir, que

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots = 1.$$

49. Hallar la suma

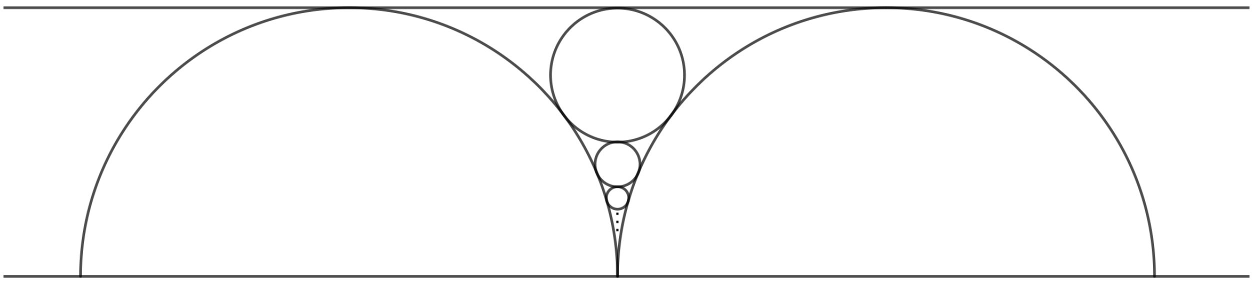
$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + (n+1)x^n.$$

50. Demuestre que, el polinomio

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

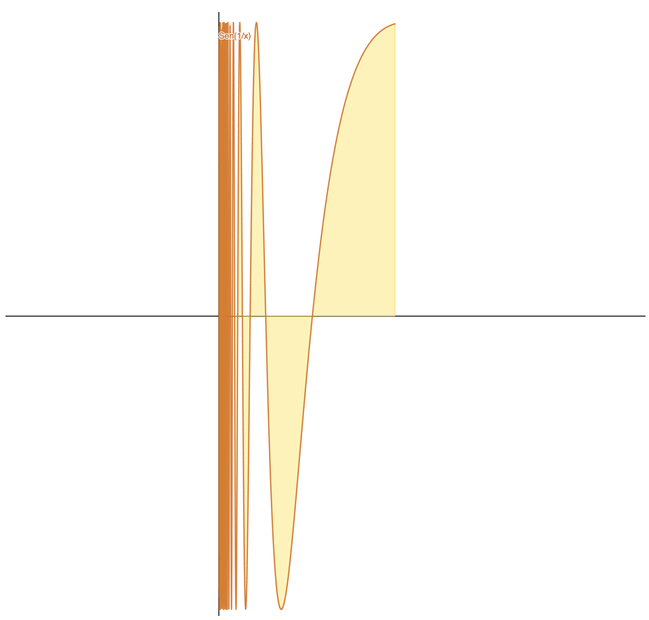
[2] *Circunferencia*, el lugar geométrico de los puntos tal que equidistan de un punto fijo, llamado, centro; *Elipse*, el lugar geométrico de los puntos tal que la suma de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante; *Hipérbola*, el lugar geométrico de los puntos tal que la diferencia de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante; *Parábola*, el lugar geométrico de los puntos que equidistan de una línea recta, llamada directriz, y de un punto, llamado foco (que no pertenece a la directriz).

[3] Cónica como solución al problema de Pappus para tres y cuatro líneas.



no tiene raíces multiples.

51. ¿El área bajo la gráfica (ver Figura) de la función $\operatorname{sen}(1/x)$ en el intervalo $(0, 2/\pi)$ es finita o infinita?

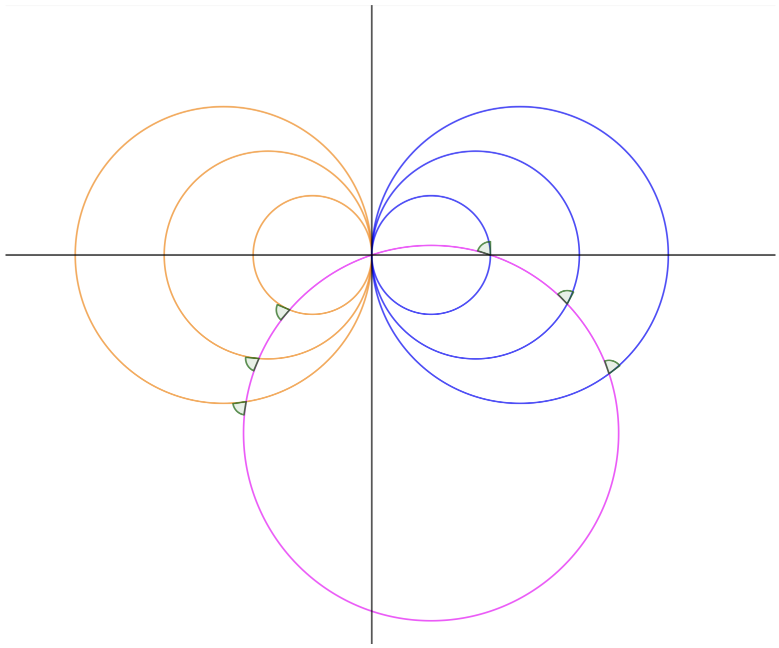


52. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función biyectiva. Demuestre que, si

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n} = L,$$

entonces $L = 1$.

53. Dada una familia de circunferencias tangentes al eje y en el origen; y cualquier otra circunferencia, $\mathcal{C}$, que pase por el origen. Demuestre que el ángulo que forma ésta con cada elemento de la familia es el mismo (ver Figura). Justifique su respuesta.[4]



54. Construya un ejemplo de un difeomorfismo local que no sea inyectivo.

55. Demuestra el Teorema Fundamental de la Aritmética sin usar el algoritmo de la división.

56. Una escalera situada sobre el suelo liso y apoyada con un extremo en la pared, se desliza hacia abajo. ¿Por qué línea se mueve un gatito sentado en la escalera?

57. Por el interior de una circunferencia inmóvil rueda tocándola sin deslizar otra circunferencia cuyo radio es dos veces menor que el de la primera. ¿Qué línea describirá el punto K de la circunferencia rodante?

58. Dados un ángulo y, dentro de él, un punto D. Trazar por el punto D una recta que corte el ángulo dado en un triangulo cuya área sea la menor posible.

59. Se dan dos puntos A y B. Hallar el conjunto de bases de las perpendiculares bajadas desde el punto A a cualquier recta que pasa por el punto B.

60. En un plano se dan una circunferencia y un punto A. Determinar el conjunto de puntos medios de las cuerdas que se forman por rectas que pasan por el punto A y la circunferencia dada.

61. En un plano se han dado una circunferencia y el punto A. Hallar el conjunto de puntos medios del segmento AN, donde N es un punto cualquiera de la circunferencia.

[4] Se pueden dar dos soluciones a este problema. Una con geometría elemental, otra con teoría de inversión. Un ejercicio interesante es realizar un análisis comparativo de ambas soluciones. Todo a la luz de acentuar el papel que juega la teoría de invariantes en la resolución de problemas.

62. ¿Existe alguna función f que sea discontinua en todo punto y que tenga solamente discontinuidades removibles?

63. Exhiba un ejemplo de una función f para la cual exista $\lim_{x\to\infty} f(x)$, pero no exista $\lim_{x\to\infty} f'(x)$.

64. Dada una cónica $\mathcal{C}$ y un punto p sobre ella:

    a) Trazar la recta tangente en p a $\mathcal{C}$.

    b) ¿Es posible realizar el trazo con regla y compás? Justifica tu respuesta.

65. Considere el siguiente sistema de ecuaciones

$$\dot{x} = P(x, y) \qquad \dot{y} = P(x, y),$$

donde $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son polinomios primos relativos de grado a lo más dos, los cuales no son ambos lineales. Demuestre que un punto crítico en el interior de una trayectoria cerrada debe ser un foco o un centro.

66. Considere el siguiente sistema de ecuaciones

$$\dot{x} = x \cdot (a_0 + a_1 x + a_2 y) \qquad \dot{y} = y \cdot (b_0 + b_1 x + b_2 y)$$

Demuestre que el sistema no tiene ciclos límites, es decir, no hay trayectorias cerradas.

67. ¿Se puede extender a las funciones de una variable real la teoría de la medida[5] de las longitudes? (pregunta planteada por Du Bois -Reymond a mediados del siglo XIX).

68. Demuestre que en todo cuadrado la diagonal es inconmensurable respecto a su lado (sin usar el principio de descenso infinito o en su defecto sin usar el infinito; y, sin usar, teoría de números).

69. Determinar qué curva es aquella cuya subtangente es siempre constante (Debeaune 1638). ¿Se puede determinar dicha curva sin usar cálculo?

70. Demuestre que toda cónica[6] satisface una configuración Papussiana.[7]

71. Se puede mostrar que las dos raíces[8] de la ecuación cúbica: $x^3 + B = Ax$, con A, $B \in \mathbb{R}$, están asociadas al problema de la trisección de un ángulo. ¿Existe un problema de naturaleza geométrica asociado a la tercera raíz real? Más aún, ¿la tercera raíz esta asociada a la trisección de un ángulo? Es decir, ¿es posible extender el método que Descartes uso en *La Géométrie* para asociar a dos de las raíces de dicha ecuación a la trisección de un ángulo?

[5] Análogo al axioma de Arquímedes, se puede uno preguntar para las funciones reales lo siguiente: Dada una sucesión $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ de funciones crecientes y dada una función creciente cualquiera $g(x)$, ¿se puede hallar un índice m tal que $g(x) < f_m(x)$?

[6] En el sentido de Apolonio, es decir, definida como aplicación de áreas.

[7] Es decir, satisface el problema de Pappus (ver Problema 21 de este problemario) para tres o cuatro líneas rectas dadas en posición.

[8] Rene Descartes en 1637 en *La Géométrie* asocia las dos raíces de la ecuación $x^3 + B = Ax$ con el viejo problema de la trisección de un ángulo. Sin embargo, no asocia a un problema de naturaleza geométrica la tercera raíz.

72. Demuestre que,
$$\int_0^a x^k = \frac{a^{k+1}}{k+1},$$
sin usar cuanto vale
$$1^k + 2^k + \cdots + n^k$$
y, sin usar, el Teorema fundamental del cálculo.

73. Dados dos segmentos de línea recta, a y b, construya segmentos de línea recta: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tal que
$$\frac{a}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \cdots = \frac{x_{n-1}}{x_n} = \frac{x_n}{b},$$
es decir, resuelva el problema de la inserción de n-medias[9] entre dos extremos.

74. Considere la cuadratriz de Dinóstrato (ver Figura; Cuadratura de un círculo). Suponiendo las propiedades mecánicas[10] de dicha curva. Demuestre que $AH = \frac{2}{\pi}r$ (sin usar cálculo[11]).

75. Supongamos que inscribimos un ángulo θ en un rectángulo $ABCD$ (ver Figura), se puede mostrar que, si AE es tal que $EF = 2AC$, entonces AF divide en razón $2:1$ al ángulo $\angle CAB$. Es decir, la configuración geométrica antes mencionada permite resolver el viejo problema de la trisección de un ángulo.[12] Todo se reduce, pues, a determinar el punto F sobre BC que hace que $EF = 2AC$. En general, podría uno plantearse el problema de dividir un ángulo θ en n-partes iguales. ¿Cuánto tendría que valer EF para que AF divida al ángulo $\angle CAB$ en razón $(n-1):1$? Más aún, ¿Cuánto tendría que valer EF para que AF divida al ángulo $\angle CAB$ en razón dada $m:n$?

76. El método de aplicación de áreas[13] recogió en esencia, en palabras de Proclo (comentador de Euclides, 412-485 d. C.), el cálculo del área en el plano. Podríamos plantearnos si el cálculo del volumen en el espacio, en esencia, yace en la generalización del método de aplicación de áreas al espacio. Es decir, ¿existe un método de aplicación de volúmenes? En general, ¿existe un método de aplicación de hipervolúmenes?

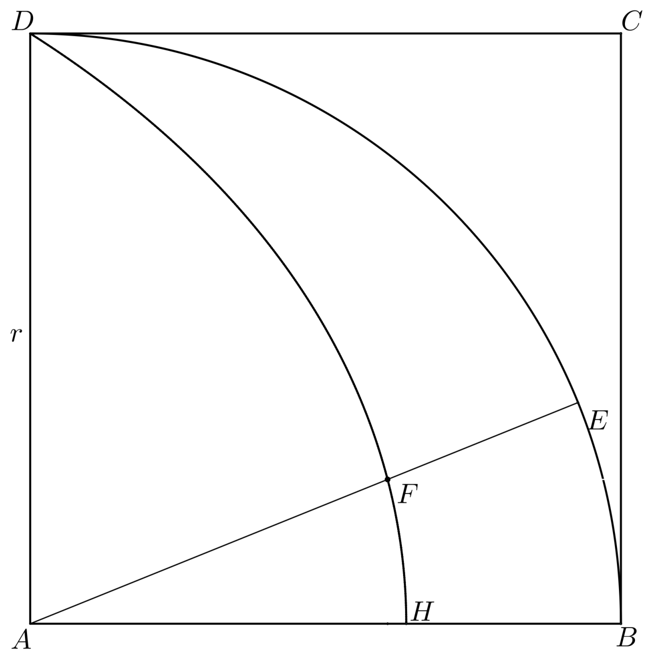
[9] **Nota histórica:** En la Antigüedad el problema de la duplicación del cuadrado y el problema de la duplicación del cubo se redujeron al problema de la inserción de una y dos medias, respectivamente. Es decir, el caso $n = 1$ se resolvió con la intersección de una línea recta y una circunferencia; El caso $n = 2$ se resolvió con la intersección de dos parábolas o con la intersección de una parábola y una circunferencia. En este sentido, podría uno preguntarse por la naturaleza de las curvas que permiten resolver, en general, el problema de la inserción de n-medias (para n fija). Más aún, ¿existen curvas que permita resolver el problema de las n-medias para cualquier n? ¿Cuál la naturaleza de dichas curvas?

[10] Dado un cuadrado $ABCD$ y un arco BED alrededor del centro A. Y, desplazando la línea AB, de manera que el punto A permanezca fijo y el punto B se desplace a lo largo del arco BED, y la línea BC manteniéndose siempre paralela a la línea AD acompañe al punto B que se mueve a lo largo de la línea AB. Además, el punto B recorra el arco BED en el mismo tiempo que la línea BC recorre la línea BA. Teniendo lugar tal movimiento, las líneas AB, BC, se cortarán entre sí en el punto F y describirá una línea cóncava BFH llamada *Cuadratriz de Dinóstrato*.

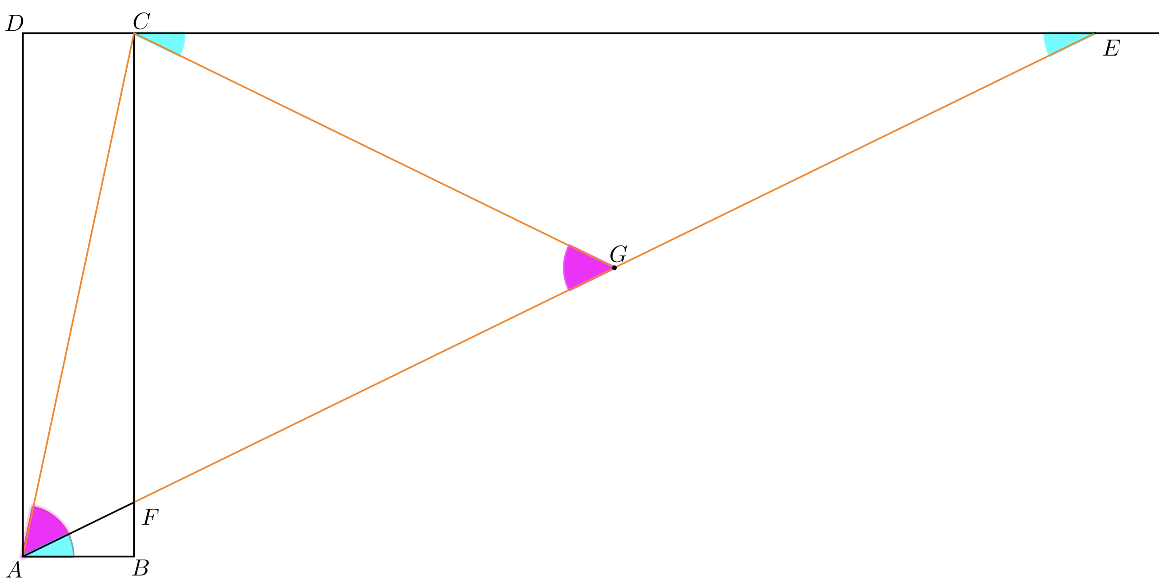
[11] Se puede mostrar usando la regla de l'Hôpital que $AE = \frac{2}{\pi}r$, pero los griegos conocían ese valor sin la necesidad de las técnicas modernas del cálculo. ¿Cómo lo descubrieron? Más aún, ¿cómo lo calcularon sin las técnicas del cálculo moderno?

[12] **Nota histórica:** En la Antigüedad el problema de la trisección de un ángulo se redujo a un problema de tipo *Neusis*.

[13] Consultar Método de Aplicación de Áreas.



Cuadratriz de Dinóstrato.



Trisección de un ángulo por neusis.